

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Програма факультативного курсу для учнів 11 класів

(можна рекомендувати використовувати також і в класах фізико-математичного профілю)

Автор: *Шаран Олександра Василівна, старший викладач кафедри математики та методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат педагогічних наук*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Одним із завдань профільного навчання є первинна підготовка школярів до майбутнього виду професійної діяльності, успішного продовження освіти у вищих навчальних закладах. Комплексні числа є необхідними для розкриття старшокласникам пізнавальних можливостей математики, підвищення їхньої математичної культури та формування професійних компетентностей.

Вивченням комплексних чисел завершується одна з основних змістових ліній шкільного курсу математики — розвиток поняття числа. Тому їх вивчення є важливим для створення в учнів цілісної завершеної картини поняття числа, яке поступово формувалося в них протягом усіх років навчання у школі (від натурального до комплексного).

Із психологічної точки зору важливим є фактор подолання певного психологічного бар'єру в сприйманні поняття комплексного числа у шкільному віці для тих, хто обере в майбутньому професію математика чи інженера.

Широке коло застосувань комплексних чисел відкриває значні дидактичні можливості для розвитку математичних інтересів учнів. Наявність в арсеналі знань учнів комплексних чисел збагачує їхні уявлення про сукупність методів пізнання, зокрема розширює їхні можливості при розв'язуванні задач, спонукає до перших математичних досліджень, посилює прикладну функцію математики.

Основна мета курсу — завершити змістову числову лінію курсу алгебри розширенням множини дійсних чисел до множини комплексних чисел; озброїти учнів новим ефективним методом розв'язування задач з використанням апарату комплексних чисел; за допомогою прикладних задач та задач з міжпредметними та внутрішньопредметними зв'язками сформулювати в учнів інтерес до вивчення комплексних чисел та математики в цілому; підготувати учнів до вивчення курсу «Теорія функцій комплексної змінної» у вищих

навчальних закладах; розвивати математичну культуру, інтуїцію та ерудицію учнів.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням **таких завдань**:

- формування уявлень учнів про комплексні числа та їх застосування в різних галузях науки і техніки;
- підвищення математичної культури учнів у зв'язку з ознайомленням із методом комплексних чисел розв'язування задач;
- формування стійких пізнавальних інтересів до математики;
- формування природничо-наукового світогляду на основі міжпредметних зв'язків, що усвідомлюються в процесі розв'язування прикладних задач та задач із міжпредметними та внутрішньопредметними зв'язками;
- підсилення прикладної спрямованості курсу математики.

Курс розрахований на 34 години (1 година на тиждень) і призначений для учнів 11 класів з поглибленим вивченням математики та учнів, що мають високий рівень знань, у класах, де математика є профільним предметом.

Програма курсу є орієнтовною і допускає певні модифікації. Вона складається з двох умовних частин. Перша, традиційна, частина містить: означення поняття комплексного числа, форми запису комплексних чисел, правила виконання дій над комплексними числами в різних формах запису, основні властивості тощо. Друга частина передбачає розгляд основних застосувань комплексних чисел (у теорії многочленів, тригонометрії, геометрії, фізиці, техніці). Вивчення традиційної частини курсу є обов'язковим, оскільки в ній подаються відомості, що становлять основу вивчення наступних тем курсу. Всі напрями застосувань є автономними, їх можна розглядати з учнями в довільній послідовності: одні теми вивчати глибше, з іншими тільки ознайомитися чи не розглядати зовсім. Така гнучкість курсу у виборі тем для вивчення спрямована перш за все на допомогу вчителю, який повинен враховувати конкретні умови: інтереси, бажання учнів, пов'язані з майбутньою професією, їх навчальні можливості, час, відведений на вивчення курсу (його можна вивчати протягом одного чи кількох навчальних років), матеріально-технічну базу школи та інші умови. Матеріал, поданий у квадратних дужках, розрахований на учнів класів з поглибленим вивченням математики і є не обов'язковим для опрацювання у класах, де математика вивчається на профільному рівні.

Особливості організації навчання. Основною формою проведення занять під час опрацювання курсу залишається традиційна система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь і навичок, узагальнення та систематизація знань, контроль і корекція знань. Поряд із цим ширше, ніж при вивченні обов'язкового курсу математики, використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, а також нетрадиційні форми на-

вчання (групові, дидактичні ігри, математичні «бої», інтегровані уроки алгебри з іншими природничими дисциплінами тощо). Методика навчання характеризується інтенсивною самостійною діяльністю учнів, індивідуалізацією навчання, застосуванням проблемно-пошукових та дослідницьких методів.

Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання. Підвищенню ефективності курсу в старших класах сприяє використання комп'ютерних засобів навчального призначення, наприклад системи комп'ютерної алгебри DERIVE, педагогічного програмного засобу GRAN1 та інших. Використання аналітичних і графічних можливостей зазначених програм дозволяє індивідуалізувати вивчення курсу, здійснювати контроль, самоконтроль засвоєння навчального матеріалу та своєчасну корекцію знань і вмінь.

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа	6
2	Тригонометрична форма комплексного числа	5
3	Показникова форма комплексного числа	4
4	Застосування комплексних чисел у теорії многочленів	3
5	Застосування комплексних чисел у тригонометрії	2
6	Застосування комплексних чисел у геометрії	7
7	Застосування комплексних чисел у загальній фізиці, електротехніці, техніці	3
8	Узагальнення і систематизація навчального матеріалу	4
	РАЗОМ	34

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

(всього 34 год, 1 год на тиждень)

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
6	<p>Тема 1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа</p> <p>Розвиток поняття числа від натурального до дійсного. Розширення множини дійсних чисел. Поняття комплексного числа. Геометричне тлумачення комплексних чисел та означення комплексної площини. Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі та їх властивості. Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником. Спряжені комплексні числа, їх властивості. [Добування квадратного кореня з комплексного числа.] Формули скороченого множення. Розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Поняття модуля комплексного числа, його властивості. Ділення відрізка в заданому відношенні. Відстань між точками комплексної площини. Рівняння кола та прямої, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає задані точки, і проходить через його середину.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>описує</i> поняття комплексного числа, його модуля, спряжених і протилежних комплексних чисел; • <i>розв'язує</i> квадратні рівняння в полі C; • <i>формулює</i> правила дій над комплексними числами в алгебраїчній формі; • <i>знаходить</i> суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел, степінь [та квадратний корінь з] комплексного числа; • <i>застосовує</i> формули скороченого множення до спрощення виразів; • <i>розв'язує</i> квадратні рівняння з комплексними коефіцієнтами; • <i>наводить</i> геометричну інтерпретацію комплексних чисел і арифметичних операцій над ними; • <i>обчислює</i> комплексну координату точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні, відстань між точками комплексної площини; • <i>знаходить</i> рівняння кола та прямої, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає задані точки, і проходить через його середину.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
5	<p>Тема 2. Тригонометрична форма комплексного числа</p> <p>Поняття аргументу комплексного числа, його властивості. Тригонометрична форма комплексного числа. Добуток і частка комплексних чисел у тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня n-го степеня з комплексного числа.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>описує</i> поняття аргументу комплексного числа; • <i>здійснює</i> перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і навпаки; • <i>формулює</i> правила дій над комплексними числами у тригонометричній формі; • <i>знаходить</i> добуток і частку комплексних чисел у тригонометричній формі, степінь комплексного числа за формулою Муавра та корінь n-го степеня з комплексного числа.
4	<p>Тема 3. Показникова форма комплексного числа</p> <p>Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Добуток, частка комплексних чисел та піднесення до степеня в показниковій формі. [Експонента комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>записує</i> формулу Ейлера, комплексне число в показниковій формі; • <i>формулює</i> правила дій над комплексними числами в показниковій формі; • <i>знаходить</i> добуток, частку комплексних чисел, степінь комплексного числа в показниковій формі; • <i>[формулює</i> означення експоненти комплексного числа, логарифма комплексного числа, степеня з довільним показником, синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса комплексного числа та <i>обчислює</i> їх значення.]

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
3	<p>Тема 4. Застосування комплексних чисел у теорії многочленів</p> <p>Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри. Розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> основну теорему алгебри многочленів; • <i>знаходить</i> раціональні корені многочлена; • <i>знаходить</i> многочлени за даними коренями, в тому числі многочлени з дійсними коефіцієнтами; • <i>розкладає</i> многочлени на лінійні та квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами; • <i>знаходить</i> кратність коренів многочлена; • <i>розв'язує</i> алгебраїчні рівняння вищих степенів.
2	<p>Тема 5. Застосування комплексних чисел у тригонометрії</p> <p>Доведення основних формул тригонометрії, тригонометричних тотожностей та знаходження тригонометричних сум за допомогою комплексних чисел.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>доводить</i> основні формули тригонометрії, тригонометричні тотожності за допомогою комплексних чисел; • <i>знаходить</i> тригонометричні суми, використовуючи комплексні числа.
7	<p>Тема 6. Застосування комплексних чисел у геометрії</p> <p>Ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умов належності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умов належності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки комплексної площини;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	<p>Побудова правильних багатокутників, обчислення площ довільних багатокутників.</p> <p>Перетворення площини і комплексні числа.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>розв'язує</i> планіметричні задачі, застосовуючи комплексні числа; • <i>будує</i> правильні багатокутники, використовуючи комплексні числа; • <i>знаходить</i> площі багатокутників за заданими координатами вершин; • <i>аналітично описує</i> паралельне перенесення, поворот, центральну симетрію, осьову симетрію, гомотетію у комплексних координатах; • <i>використовує</i> формули перетворень при розв'язуванні геометричних задач.
3	<p>Тема 7. Застосування комплексних чисел у загальній фізиці, електротехніці, техніці</p> <p>Застосування комплексних чисел до розв'язування задач із деяких розділів фізики (механіки, електротехніки). Застосування комплексних чисел у техніці.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>пояснює</i> принцип використання комплексних чисел при розв'язуванні задач з механіки; • <i>формулює</i> означення комплексу струму, напруги, електрорушійної сили, комплексного опору кола; • <i>використовує</i> комплексні числа при розв'язуванні задач із механіки та електротехніки; • <i>описує</i> застосування комплексних чисел у техніці.
4	<p>Узагальнення і систематизація навчального матеріалу</p>	

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
Тема 1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа (6 год)			
1		Розвиток поняття числа від натурального до дійсного. Розширення множини дійсних чисел. Поняття комплексного числа. Геометричне тлумачення комплексних чисел та означення комплексної площини	Семинарське заняття
2		Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі та їх властивості. Степінь комплексного числа з натуральним і цілим показником. Спряжені комплексні числа, їх властивості. [Добування квадратного кореня з комплексного числа.] Геометрична інтерпретація операцій додавання і віднімання	Урок засвоєння нових знань, лекція
3		Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Степінь комплексного числа з натуральним і цілим показником. [Добування квадратного кореня з комплексного числа.] Навчальна самостійна робота	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
4		Формули скороченого множення. Розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Математичний диктант	Урок узагальнення та систематизації знань

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
5		Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Поняття модуля комплексного числа, його властивості. Ділення відрізка у заданому відношенні. Відстань між точками комплексної площини. Рівняння кола та прямої, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає задані точки, і проходить через його середину	Урок засвоєння нових знань, лекція
6		Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Геометричне місце точок, заданих на комплексній площині. Короткочасна самостійна робота перевірконого характеру	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
Тема 2. Тригонометрична форма комплексного числа (5 год)			
7		Поняття аргументу комплексного числа, його властивості. Тригонометрична форма комплексного числа. Добуток і частка комплексних чисел у тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня n -го степеня з комплексного числа	Урок засвоєння нових знань, лекція
8		Добуток і частка комплексних чисел у тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня n -го степеня з комплексного числа	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
9		Розв'язування вправ з використанням комп'ютера. Самостійна робота	Урок узагальнення та систематизації знань

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
10		Контрольна робота	Контроль знань учнів
11		Аналіз контрольної роботи	Корекція знань і вмінь учнів
Тема 3. Показникова форма комплексного числа (4 год)			
12		Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Добуток, частка комплексних чисел та піднесення до степеня в показниковій формі	Урок засвоєння нових знань, лекція
13		Добуток, частка комплексних чисел та піднесення до степеня в показниковій формі. Математичний диктант	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
14		[Експонента комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]	Урок засвоєння нових знань, лекція
15		[Експонента комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
Тема 4. Застосування комплексних чисел у теорії многочленів (3 год)			
16		Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри. Розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів	Урок засвоєння нових знань, лекція

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
17		Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри. Розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
18		Комплексні корені многочлена. Самостійна робота з використанням комп'ютера	Урок узагальнення та систематизації знань
Тема 5. Застосування комплексних чисел у тригонометрії (2 год)			
19		Застосування комплексних чисел у тригонометрії	Урок засвоєння нових знань, лекція
20		Застосування комплексних чисел у тригонометрії	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
Тема 6. Застосування комплексних чисел у геометрії (7 год)			
21		Використання комплексних чисел у геометрії: ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умова належності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки	Урок засвоєння нових знань, лекція
22		Використання комплексних чисел у геометрії: ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умова належності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки. Математичний диктант	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
23		Використання комплексних чисел у геометрії: побудова правильних багатокутників, обчислення площ довільних багатокутників	Комбінований урок
24		Перетворення площини і комплексні числа	Урок засвоєння нових знань, лекція
25		Перетворення площини і комплексні числа	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
26		Перетворення площини і комплексні числа. Розв'язування складніших задач	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
27		Розв'язування задач на застосування комплексних чисел у геометрії. Практична робота (складання таблиці)	Урок узагальнення та систематизації знань
Тема 7. Застосування комплексних чисел у загальній фізиці, електротехніці, техніці (3 год)			
28		Застосування комплексних чисел до розв'язування задач із деяких розділів загальної фізики. Застосування комплексних чисел у техніці	Комбінований урок
29		Застосування комплексних чисел в електротехніці	Урок засвоєння нових знань, лекція
30		Застосування комплексних чисел в електротехніці	Урок формування вмінь і навичок, практичне заняття
Тема 8. Узагальнення і систематизація навчального матеріалу (4 год)			
31		Внесок вчених-математиків у розвиток теорії комплексних чисел	Семінарське заняття

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття	Примітка
32		Спроби інтерпретації комплексних чисел провідними математиками	Семинарське заняття
33		Дидактична гра «Перший мільйон»	Урок узагальнення та систематизації знань
34		Залікова робота. Підсумковий урок	Підсумковий контроль знань

ЛІТЕРАТУРА

1. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел.— М.: Просвещение, 1975.— 158 с.
2. Балк М. Б., Балк Г. Д., Полухин А. А. Реальные применения мнимых чисел.— К.: Радянська школа, 1988.— 255 с.
3. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення.— К.: Радянська школа, 1968.— 116 с.
4. Бродський Я. С., Сліпенко А. К. Про електричний струм, похідну та комплексні числа // Математика.— 2002.— №7 (163).— С. 9–11.
5. Буковська О. І. Комплексні числа.— Х.: Вид. група «Основа», 2004.— 112 с.
6. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике: Книга для внеклассного чтения. IX–X кл.— М.: Просвещение, 1978.— 192 с.— С. 173–190.— (Мир знаний).
7. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X классы: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1983.— 352 с.
8. Дрозд Ю. А. Комплексні числа як подібності площини // У світі математики.— К.: Радянська школа, 1979.— Вип. 10.— С. 71–81.
9. Завало С. Т. Комплексні числа.— К.: Вища школа, 1982.— 135 с.— (Б-ка фіз.-мат. школи. Математика).
10. Избранные вопросы математики, 10 класс: Факультативный курс / Под ред. В. В. Фирсова.— М.: Просвещение, 1980.— 190 с.
11. Кушнір І. Комплексні числа: Теорія і практика.— К.: Факт, 2002.— 168 с.
12. Марач Г. К., Марач В. С. Комплексні числа і рухи площини // Математика.— 2003.— № 19 (223).— С. 18–24.
13. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1960.— 55 с.

14. Понарин Я. П. Метод комплексных чисел в планиметрии // Математика в школе.— 1991.— № 2.— С. 46–54.
15. Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой: В 4 кн.— М.: Наука, 1977.— Кн. 1. Метод координат.— 1977.— 135 с.
16. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел.— М.: Наука, 1986.— 117 с.
17. Понтрягин Л. С. Основная теорема алгебры // Квант.— 1982.— №4.— С. 3–9.
18. Потапов Н. Г. Приложение комплексных чисел к решению задач по тригонометрии // Математика в школе.— 1964.— № 2.— С. 61–65.
19. Скопец З. А. Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990.— 224 с.
20. Скопец З. А. Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии // Математика в школе.— 1967.— № 1.— С. 63–71.
21. Тихомиров В. М., Успенский В. В. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение.— М.: Изд-во МЦНМО, 1997.— № 1.— 97 с.
22. Хмара Т. М., Шаран О. В. Застосування комплексних чисел до розв'язування геометричних задач // Математика в школі.— 2004.— № 7.— С. 41–45; № 8.— С. 32–40.
23. Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування.— Дрогобич: НВЦ «Каменярь», 2004.— 192 с.
24. Шаран О. В. Конспекти уроків з теми «Комплексні числа» // Математика в школі.— 2008.— № 2.— С. 41–48; № 3.— С. 45–52; № 4.— С. 35–42.
25. Шаран О. В. Перетворення площини і комплексні числа (паралельне перенесення, центральна симетрія, гомотетія) // Математика в школі.— 2005.— № 4.— С. 39–43.
26. Шаран О. В. Перетворення площини і комплексні числа (поворот, осьова симетрія) // Математика в школі.— 2005.— № 5.— С. 44–49.
27. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 10 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти.— К.: Освіта, 2000.— 318 с.
28. Яглом И. М. Комплексные числа и их применения в геометрии.— М.: Физматгиз, 1963.— 192 с.