ВВЕДЕННЯ У ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Програма курсу за вибором для учнів 11 класів з профільним і поглибленим вивченням математики

Автор: ***Цибко Валентина Володимирівна,*** *вчитель математики Білоцерківського колегіуму Київської області*

Чому геометрію часто називають холодною і сухою? Одна з причин полягає в її нездатності описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари — це не сфери, гори — це не конуси, лінії берега — це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не розповсюджується по прямій... Природа демонструє нам не просто більш високий ступінь, а зовсім інший рівень складності. Число різних масштабів довжин в структурах завжди нескінченно.

Бенуа Мандельброт

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

З огляду на динамічність життя та нові структури сучасної математики з'являється необхідність у вивченні теорії фракталів. Відповідно до Державного стандарту базової і повної середньої освіти одним із завдань старшої школи освітньої галузі «Математика» є розширення та поглиблення уявлень учнів про застосування математики в практичній діяльності в різних галузях науки. Один з аспектів геометрії, який може повідомляти середовищу нашого існування життєдайну енергію, — це фрактали, що являють собою органічні моделі, які створюються рухами — «хаосом», властивим природі. Вони змінили багато традиційних уявлень про геометрію. Пропонований курс присвячений цікавій і актуальній темі, яка відкриває учням широкі перспективи в подальших дослідженнях у різних сферах діяльності.

Курс призначений для учнів 11 класу з профільним або поглибленим вивченням математики та розрахований на 35 годин.

Мета курсу — ознайомлення з такими розділами математики, які дозволяють суттєво розширити дослідницький потенціал обдарованої дитини, поглибити її знання з математики.

Основні завданнями курсу:

- сформувати в учнів уявлення про фрактали;
- сприяти формуванню стійкого інтересу учнів до навчальних предметів «Алгебра і початки аналізу», «Геометрія»;
- дослідити математичне підґрунтя фрактального руху;
- розглянути прототип фрактала — множину Кантора;
- встановити «родинні» зв'язки між визначеним найпростішим одновимірним фракталом і такими відомими фрактальними кривими, як «цвинтар», «килим» Серпінського;
- навчити учнів обчислювати розмірність Хаусдорфа-Безиковича декартового добутку множин канторівського типу;
- розвинути логічне мислення, пам'ять, інформаційну та графічну культуру, увагу школярів;
- виховати в учнів естетичний смак, уміння аналізувати та співставляти.

Програма курсу розроблена з урахуванням структури та послідовності вивчення тем, що входять до складу програми шкільного курсу з математики на рівні стандарту. Учитель відповідно до рівня навчальних досягнень учнів може спростити або розширити та поглибити запропонований зміст теми.

Основні вимоги до теоретичної математичної підготовки. Учні повинні *знати*:

- множини та операції над ними;
- границю послідовності;
- властивості експоненціальної функції, властивості логарифмів;
- похідну, та її геометричний зміст;
- взаємне розміщення площин і прямих у координатному просторі.

ОРІЄНТОВНИЙ РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Вступ	2
2	Теорія фракталів	6
3	Регулярний фрактал	7
4	Приклади множин канторівського типу	10
5	Безмежна краса фракталів	3
6	Застосування фракталів у різних галузях	7
	РАЗОМ	**35**

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

Вступ ***(2 год)***

Історичний розвиток та сучасне бачення фрактального аналізу. Теоретичні основи самоподібності. Види фрактального руху. Сфери дослідження фрактального аналізу.

Основна мета:

- ознайомити учнів з історичним аспектом виникнення поняття «фрактал»;
- розкрити поняття самоподібності;
- розглянути види фрактального руху;
- показати приклади фрактального аналізу.

Основні вимоги. Учні повинні *знати:*

- історію виникнення поняття фрактала;
- пояснення поняття самоподібності;
- приклади структур, що є предметом розгляду фрактального аналізу.

Тема 1. Теорія фракталів ***(6 год)***

Означення фрактального поняття. Основні властивості фракталів. Розмірність фрактала. Класифікація фракталів. Приклади геометричних фракталів.

Основна мета:

- ввести описове означення фрактала;
- ознайомити з основними властивостями фракталів;
- розглянути способи знаходження фрактальної розмірності;
- провести класифікацію фракталів.

Основні вимоги. Учні повинні *знати:*

- означення фрактала (описове);
- основні властивості фракталів;
- способи знаходження фрактальної розмірності;
- про алгебраїчні, геометричні, стохастичні, рукотворні, природні фрактали.

Тема 2. Регулярний фрактал ***(7 год)***

Множина Кантора (геометричний підхід). Властивості множини Кантора. Фрактальна розмірність множини. Фрактальні та самоподібні властивості множини Кантора.

Основна мета:

- розглянути множину Кантора — прототип фрактала;
- навчити будувати множину Кантора (геометричний підхід);
- довести основні властивості множини Кантора;
- ознайомити з хаусдорфовою розмірністю;
- дослідити фрактальні та самоподібні властивості множини Кантора.

Основні вимоги. Учні повинні *вміти:*

- оперувати поняттям множини;
- будувати прототип фрактала;
- доводити основні властивості множини Кантора;
- пояснювати фрактальну розмірність множин;
- розрізняти фрактальні та самоподібні властивості множини Кантора.

Тема 3. Приклади множин канторівського типу *(10 год)*

Сингулярна функція Кантора. «Цвинтар», «килим» Серпінського. Крива Коха. Крива дракона. Губка Менгера. Фрактал Ляпунова, крива заповнення простору, межі множин груп Кліні. Розмірність Хаусдорфа — Безиковича декартового добутку множин. Множина Кантора — дивний репелер.

Основна мета:

- ознайомити з канторівською функцією та її властивостями;
- дослідити декартові добутки множин («цвинтар», «килим» Серпінського);
- ознайомити з кривою Коха, фракталом Ляпунова, губкою Менгера, кривою дракона, кривою заповнення простору, межею множин груп Кліні;
- навчити знаходити розмірності декартового добутку множин;
- розглянути поняття — атрактор та репелер динамічної системи.

Основні вимоги. Учні повинні *вміти:*

- будувати канторівську драбину — графік сингулярної (канторівської) функції;
- встановлювати «родинні» зв'язки між визначеним найпростішим одновимірним фракталом і такими відомими фрактальними кривими, як «цвинтар», «килим» Серпінського;
- розрізняти множини канторівського типу;
- обчислювати розмірність Хаусдорфа — Безиковича декартового добутку множин канторівського типу;
- визначати атрактор та репелер динамічної системи.

Тема 4. Безмежна краса фракталів *(3 год)*

Геометричні фрактали, динамічні фрактали. Нелінійні перетворення, атрактори, «естетичний хаос».

Основна мета:

- показати красу фракталів (візуальне сприйняття);
- ознайомити з різноманітними фрактальними структурами та причинами їх виникнення.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *мати уявлення* про геометричні фрактали;
- *розрізняти* динамічні фрактали, нелінійні перетворення, атрактори;

- *уміти аналізувати* стохастичні фрактали (плазма, броунівський рух, фрактальне дерево);
- *уміти будувати* фрактальні структури, використовуючи сучасне програмне забезпечення.

Тема 5. Застосування фракталів у різних галузях ***(7 год)***

Генерація зображень природних об'єктів, механіка рідин. Біологія; фрактальні антени, стиснення зображень; соціологія; економіка. Децентралізовані мережі, фрактальна природа в літературі.

Основна мета:

- розглянути застосування фрактального аналізу в різних сферах діяльності людини (географія, фізика, хімія, медицина, біологія, література, соціологія, економіка).

Основні вимоги. Учні повинні *знати:*

- про наявність фрактальної природи, використання фрактального аналізу в географії, фізиці, хімії;
- приклади застосування фрактального аналізу в медицині, біології, літературі, соціології, економіці.

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

Номер заняття	Дата	Зміст навчального матеріалу
Вступ ***(2 год)***		
1		Історичний розвиток та сучасне бачення фрактального аналізу
2		Теоретичні основи самоподібності; види фрактального руху; сфери дослідження фрактального аналізу
Тема 1. Теорія фракталів ***(6 год)***		
3		Означення фрактального поняття
4–5		Основні властивості фракталів: тонкість структури; нерегулярність, дробова розмірність
6		Розмірність фрактала
7		Класифікація фракталів
8		Приклади геометричних фракталів

Номер заняття	Дата	Зміст навчального матеріалу
Тема 2. Регулярний фрактал *(7 год)*		
9		Множина Кантора (геометричний підхід)
10–11		Властивості множини Кантора: розривність; щільність, міра
12		Покриття множини X
13		Фрактальна розмірність множини
14		Хаусдорфна міра множини
15		Фрактальні та самоподібні властивості множини Кантора
Тема 3. Приклади множин канторівського типу *(10 год)*		
16		Сингулярна функція Кантора
17		«Дивні» властивості функції Кантора
18		«Цвинтар», «килим» Серпінського. Крива Коха
19		Векторна сума множин
20		Крива дракона. Губка Менгера. Фрактал Ляпунова, крива заповнення простору, межі множин груп Кліні
21		Розмірність Хаусдорфа — Безиковича декартового добутку множин
22		Знаходження розмірності Хаусдорфа — Безиковича декартового добутку множин
23		Динамічні системи
24		Атрактор. Репелер
25		Множина Кантора — дивний репелер
Тема 4. Безмежна краса фракталів *(3 год)*		
26		Геометричні фрактали, динамічні фрактали
27		Нелінійні перетворення, атрактори
28		«Естетичний хаос»

Номер заняття	Дата	Зміст навчального матеріалу
Тема 5. Застосування фракталів у різних галузях *(7 год)*		
29		Генерація зображень природних об'єктів, механіка рідин
30		Соціологія. Економіка
31		Біологія
32		Географія
33		Фрактальні антени, стиснення зображень
34		Децентралізовані мережі
35		Фрактальна природа в літературі

ЛІТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальна геометрія природи.— М.: Інститут комп'ютерних досліджень, 2002.
2. Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов.— М.: Мир, 1993.
3. Федер Е. Фракталы.— М.: Мир, 1991.
4. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология.— М.: Издательство МГУ, 1993.
5. Фракталы в физике.— М.: Мир, 1988.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.— Ижевск: РХД, 2001.
7. Карпов В. Г., Субашиев А. В. Что такое фракталы? — Л.: ЛПИ, 1989.
8. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук.— 1985.— Т. 146, вып. 3.— С. 493.
9. Соколов И. М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физических наук.— 1986.— Т. 150, вып. 2.— С. 221.
10. http://home.mal.ru/~shabun/fraetals/index.htm.
11. http://chat.ra/~fractals/mdex.htm.
12. http://www.visti.net/cplusp/all_96/6n96y/6n96yla.htm.
13. http://www.iph.ras.rn/~inifs/rus/damlov.htm.
14. http://www.geocities.com/CapeCanaveral/2854/.
15. http://archives.math.utk.edu/topics/fractals.html.
16. http://www.cosy.sbg.ac.at/rec/ifs/f-faq.html.
17. http://www.cosy.sbg.ac.at/rec/ifs/index.htm.
18. http://www2.vo.lu/homepages/phahn/fractals/barnsley.htm.
19. http://www.swm.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/randomifs/.