

## ІСТОРІЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ

### Програма курсу за вибором для учнів 10 класів історичного, історико-філологічного, літературного, філософського профілів

**Автор:** *Грицик Тетяна Андріївна, викладач математики ВНЗ «Надслучанський інститут» м. Березне Рівненської області*

#### ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Тригонометрія як галузь наукового знання має багату і цікаву історію, вивченню якої і присвячено цей курс. Історія тригонометрії налічує кілька тисячоліть. Тригонометрія виникла в стародавності як один із розділів астрономії і в своєму розвитку пройшла декілька етапів, перш ніж набула сучасного вигляду. Кожен етап цього розвитку вирізняється своїми особливостями, науковими пошуками та здобутками, іменами провідних учених, які зробили вагомий внесок у формування тригонометрії як науки. Курс присвячено розгляду історичних відомостей про виникнення та формування науки тригонометрії, основні етапи її розвитку, наукову діяльність з тригонометрії математиків, астрономів, філософів та інших науковців різних часів і народів.

Вивчення історичних відомостей з тригонометрії сприяє збагаченню наукового світогляду учнів, закріпленню та розвитку інтересу до математики. Для учнів, які планують пов'язати майбутню навчальну та професійну діяльність із гуманітарними науками, вивчення цього курсу доцільне з метою збагачення літературних, історичних, філологічних та філософських знань.

У процесі вивчення курсу особливу увагу слід звернути на питання, які розкривають походження тригонометричної символіки та термінології, роль практичної діяльності людини в зародженні тригонометрії; порівняльну характеристику різних етапів розвитку тригонометрії; інтеграцію та взаємозв'язок тригонометрії з різними галузями знань.

Вважаємо, що немає необхідності вимагати від учнів запам'ятовування всіх фактів, імен, дат тощо. Достатньо, щоб в результаті вивчення курсу учні вільно орієнтувалися в періодах розвитку тригонометрії, характеризували основні наукові здобутки та специфіку відповідного історичного періоду, називали імена видатних учених, які розвивали тригонометрію, та їх основні наукові праці. При цьому важливо формувати в учнів навички та вміння самостійної та творчої роботи, наукового пошуку та дослідження.

**Мета курсу** — поглиблення та розширення уявлень учнів про тригонометрію як складову загальнолюдської культури; демонстрація історії розвитку наукової думки на прикладі тригонометрії; розвиток творчих здібностей

і навичок самостійної роботи учнів; виховання інтересу учнів до вивчення математики; інтеграція математичних і гуманітарних знань.

Під час вивчення курсу доцільно застосовувати різноманітні *організаційні форми*: доповіді учнів, бесіди, диспути, уроки-проекти, лекції. До провідних *навчальних методів* слід віднести самостійну роботу учнів та проблемно-пошукові методи. *Форми контролю*: доповіді, реферати, повідомлення учнів; написання наукових робіт на запропоновані вчителем теми та їх усний захист на підсумковому занятті. *Засоби навчання*: навчальна на наукова література з історії тригонометрії, довідники, енциклопедії, портрети вчених, реферати та наукові роботи учнів.

Курс призначений для учнів 10 класів гуманітарних профілів і розрахований на 8 годин.

### РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Вступ. Ранній період розвитку тригонометрії	1
2	Грецька тригонометрія	1
3	Індійська тригонометрія	1
4	Тригонометрія на Близьньому і Середньому Сході в Середні віки	1
5	Розвиток тригонометрії в Європі	2
6	Підсумкове заняття	2
	<b>РАЗОМ</b>	<b>8</b>

### ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу
1	<p><b>Тема 1. Вступ. Ранній період розвитку тригонометрії</b></p> <p>Загальна характеристика тригонометрії як галузі знань. Значення тригонометричного матеріалу в сучасній науці. Причини зародження тригонометрії.</p> <p>Потреби астрономії, землемірства, мореплавства, картографії у тригонометричних обчисленнях. Зачатки тригонометричних знань в Стародавньому Вавилоні та Єгипті. Папірус Аамеса.</p>

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу
	«Начала» Евкліда. Праці Арістарха та Архімеда як джерела перших тригонометричних відомостей. Наука гномоніка. Астрономічні спостереження.
1	<p><b>Тема 2. Грецька тригонометрія</b></p> <p>Наука сферика. Батько грецької астрономії Гіппарх і його внесок у розвиток тригонометрії. Таблиці хорд Гіппарха і Клавдія Птолемея, способи їх складання. Менелай і його «Сферика». Праця Птолемея «Альмагест». Герон Александрійський. Особливості грецької тригонометрії.</p>
1	<p><b>Тема 3. Індійська тригонометрія</b></p> <p>Тригонометричні знання в наукових трактатах індійців сіддхантах. Основні наукові праці: «Сур'я-сіддханта» («наука Сонця»), «Брахма-спхута-сіддханта» («Вдосконалена наука Браhma»). Видатні індійські астрономи і математики Брамагупта і Бхаскара. Заміна хорди синусом. Означення синуса. Таблиця синусів і спосіб її складання індусами. Лінія косинуса і лінія синус-верзуса. Плоска та сферична тригонометрія.</p>
1	<p><b>Тема 4. Тригонометрія на Близькому і Середньому Сході в Середні віки</b></p> <p>Виокремлення тригонометрії в самостійну науку. Уточнення тригонометричних таблиць. Введення тангенса і обчислення таблиць тангенсів. Арабська тригонометрична термінологія. Збірники астрономічних і тригонометричних таблиць зіджи. Видатні науковці цього періоду, які займалися тригонометрією: Аль-Хорезмі, Аль-Батані, Абуль-Вафа, Біруні, Насіреддін Тусі, Масуд ал-Каші, Улугбек.</p>
2	<p><b>Тема 5. Розвиток тригонометрії в Європі</b></p> <p>Формування тригонометрії європейськими вченими Середньовіччя: Бравардін, Регіомонтан, Ретікус, Пейрбах. Введення тригонометричної символіки. Внесок Л. Ейлера в тригонометрію. Тригонометрія і визначні російські математики М. І. Лобачевський та М. В. Остроградський. Автори тригонометричних формул. Тригонометрія у зв'язку з розвитком вищої математики. Тригонометрія як шкільна дисципліна. Підручники з тригонометрії.</p>
2	<b>Підсумкове заняття</b>



## ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

Учень (учениця):

- *має уявлення:*
  - про причини зародження тригонометрії;
  - способи складання математичних таблиць в різні часи;
  - історичні процеси формування основних тригонометричних понять (синус, косинус, тангенс, котангенс, тригонометрична функція, радіан, одиничне коло, ліня синуса тощо);
- *знає:*
  - особливості історичних періодів розвитку тригонометрії (грецької, індійської, європейської та інших);
  - видатних вчених, які зробили вагомий внесок у розвиток тригонометрії, та зміст їх наукових здобутків у галузі тригонометрії;
  - основні історичні дати, які відображають формування науки тригонометрії;
  - походження тригонометричної термінології та символіки;
- *уміє:*
  - характеризувати в загальних рисах основні наукові праці з тригонометрії різних часів та народів;
  - здійснювати порівняльну характеристику періодів розвитку тригонометрії;
  - висловлювати власну точку зору щодо значення наукової події, явища, процесу в розвитку тригонометрії;
  - самостійно знаходити та користуватися додатковими джерелами інформації з історії тригонометрії.

## МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКЛАДАННЯ КУРСУ

### Тема 1. Вступ. Ранній період розвитку тригонометрії

Тригонометрія, як і будь-яка інша наука, виникла з потреб життя. В учнів слід сформулювати уявлення про потреби в тригонометричних обчисленнях землемірів, моряків, астрономів та представників інших галузей практичної діяльності людини. До цього періоду належить виникнення терміна «тригонометрія», що в перекладі з грецької означає вимірювання трикутників.

«Начала Евкліда» — найдавніша праця з геометрії, в якій закладено передумови науки тригонометрії. Так, 12-та і 13-та теореми цієї книги, по суті, і є теоремою косинусів.

Вагомий внесок в зародження тригонометрії зробили великі вчені древності Арістарх та Архімед. Слід назвати та охарактеризувати їх наукові праці, які заклали основу тригонометричних обчислень.

Вирішальну роль у формуванні тригонометрії відіграла сферична тригонометрія. Учні повинні мати уявлення про основні поняття, що характеризують небесну сферу та сферичну систему координат.

Наука гномоніка — одне із джерел тригонометрії. З учнями слід розглянути поняття гномона, його практичні застосування в древності та взаємозв'язок з тригонометричними величинами.

## Тема 2. Грецька тригонометрія

Найбільшу увагу античні вчені приділяли сферичній — науці, яка на ранньому етапі свого розвитку поєднувала практичну астрономію та геометрію на сфері. Сферика відіграла основоположну роль у процесі формування сферичної тригонометрії. Основи старогрецької сферики викладені в працях Автоліка, Евкліда, Теодосія, Гіпсікла.

Значну роль в історії науки відіграла праця «Сферика» александрійського вченого I ст. н. е. Менелая, в якій вперше введено поняття сферичного трикутника, доведені базові теореми сферичної тригонометрії і створено теоретичну основу для тригонометричних обчислень. Важливе значення в історії тригонометрії має теорема Менелая, яка стала фундаментом усієї сферичної тригонометрії греків.

На цей період розвитку тригонометрії припадає життя і наукова діяльність видатного вченого древності, одного з основоположників астрономії Гіппарха. Щоб полегшити астрономічні обчислення, він склав таблиці хорд, виражених у частинах радіуса, які відігравали в той час роль сучасної таблиці синусів. Після Гіппарха тригонометрією цікавився відомий грецький астроном і правитель Єгипта Птолемей. Доцільно ознайомити учнів з поглядами Птолемея на побудову Всесвіту і його геоцентричною системою світу, зі способом складання математичних таблиць Птолемея. Слід звернути увагу учнів на головний астрономічний трактат Птолемея «Альмагест», який вміщував основні на той час тригонометричні знання.

Важливо, щоб учні усвідомили специфіку грецької тригонометрії, яка полягає в тому, що: 1) в ній розглядалися хорди кола; 2) була відсутня будь-яка символіка; 3) тригонометрія складала допоміжний розділ астрономії.

## Тема 3. Індійська тригонометрія

Особливе значення в історії математики має заміна хорди синусом. Синус був введений ще в «Сур'ї-сіддханті». У праці «Аріабхатіам» індійського астронома і математика Аріабхати дано визначення синуса і наведена таблиця 24-х його значень. Індійці також ввели відношення прилеглого катета до гіпотенузи, яке є косинусом. Заміна хорди синусом відбулася у зв'язку з тим, що індійські астрономи широко застосовували проєктивні методи, розроблені греками. Індійцям були відомі деякі співвідношення між тригонометричними величинами. Так, наприклад, їм були відомі співвідношення  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = r^2$ ,  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\sin \text{vers} 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ , а також вираз для синуса суми і різниці дуг.

Доцільно наголосити, що тригонометрія в Індії розвивалась, як і в Греції, у зв'язку з потребами астрономії, зокрема при вивченні переміщень Сонця і Місяця. Елементи тригонометрії були необхідні для обчислення відстаней і кутів під час спостережень за небесними тілами. Доцільно ознайомити учнів зі способом складання таблиць синусів, що використовували індійці.

Важливо підкреслити здобутки індійців у розвитку тригонометричних знань порівняно з греками, які полягали у введенні півхорди (синуса) та косинуса, а також складанні тригонометричних таблиць замість таблиць хорд.

#### **Тема 4. Тригонометрія на Близькому і Середньому Сході в Середні віки**

У VIII–XV ст. на розвиток тригонометрії вплинули народи сучасних територій Середньої Азії, Закавказзя, Ірану, Афганістану і Сирії. До кінця XI ст. спільними зусиллями вчених Близького і Середнього Сходу були закладені основи тригонометрії як самостійної науки. Виділення тригонометрії в самостійну наукову галузь можна віднести до найвизначніших здобутків цього періоду її розвитку.

Особливу увагу слід приділити розгляду таких наукових здобутків цього історичного відрізка часу:

- у працях відомого астронома IX ст. Аль-Батані вводиться нова, невідома досі тригонометрична величина, яку він назвав «тінню» і яка за сучасною термінологією є тангенсом або котангенсом;
- наприкінці X ст. арабський геометр Абуль-Вафа запропонував метод складання таблиць синусів кутів через кожні  $10'$ , а також склав таблицю тангенсів. Він використовував у своїх працях тригонометричні величини, які тепер називаються секансом і косекансом;
- Біруні уточнив і узагальнив результати, яких досягли його попередники в тригонометрії. У праці «Канон Масуда» він виклав усі відомі на той час відомості з тригонометрії та суттєво їх доповнив;
- азербайджанець Насіреддін Тусі вперше виділив тригонометрію як самостійну математичну науку. У своєму «Трактаті про повний чотирихсторонник» Насіреддін довів теореми синусів і тангенсів і, по суті, завершив цикл основних ідей прямолінійної та сферичної тригонометрії;
- у першій половині XV ст. Масуд ал-Каші з великою точністю обчислив тригонометричні таблиці з кроком в  $1'$ , які протягом 250 років залишалися неперевершеними;
- узбецький астроном і математик Улугбек склав тригонометричні таблиці і вперше запропонував аналітичний метод обчислення синуса дуги одного градуса.

Підсумовуючи питання щодо розвитку тригонометрії в цей період, слід зазначити, що саме в цей час: 1) було введено нові тригонометричні величини і складено для них таблиці; 2) знайдено значно точніші способи складання



математичних таблиць, ніж ті, які застосовувалися до цього часу; 3) тригонометрія набула самостійного характеру; 4) араби вперше почали користуватися формулами, які містять тригонометричні величини.

### Тема 5. Розвиток тригонометрії в Європі

З XIII ст. в Європі з'являються математичні праці, в яких значне місце відводиться тригонометрії. До них відносять наукові твори Леонардо Пізанського, Джона Пекхама, Джовані Кампано, Брэдвардіна, Річарда з Валінгфорда, Лінерііса, Леві бен Герсона, Домініко де Клавазіо, Жана де Мер, Ніколая Кузанського.

Слід відзначити видатних учених цього періоду Брэдвардіна та Регіомонтана, які систематизували наявні тригонометричні відомості та суттєво їх доповнили. Важливо повідомити про перший в Європі математичний твір, у якому тригонометрія розглядається окремо від астрономії,— «П'ять книг про трикутники всіх видів» Регіомонтана.

Історія плоскої та сферичної тригонометрії в XVI–XVII ст. пов'язана з іменами європейських учених Франческо Мавроліко, Христофа Клавія, Франсуа Вієта, Адріана ван Роумена, Бартоломея Пітіска.

На порозі XVII ст. в розвитку тригонометрії з'являється новий напрям — аналітичний. Якщо до цього часу головною метою науки тригонометрії вважалося розв'язування трикутників, то в XVII–XIX ст. тригонометрія поступово стає одним із розділів математичного аналізу.

Доцільно розглянути застосування тригонометрії в механіці, фізиці, техніці, особливо при вивченні коливальних рухів та інших періодичних процесів. У зв'язку з вивченням гармонічних коливань та інших коливальних рухів слід повідомити про видатного французького вченого Ж. Фур'є.

Важливо детально розглянути питання, що стосуються введення та вивчення тригонометричних функцій, побудови аналітичної теорії тригонометричних функцій. Слід підкреслити абстрактність поняття тригонометричної функції, яке у процесі історичного розвитку набувало все ширшого застосування в теоретичних дослідженнях як у самій математиці, так і в її практичних застосуваннях. Бажано, щоб учні знали, коли й ким вперше були побудовані синусоїда, косинусоїда, тангенсоїда; хто й коли займався дослідженнями тригонометричних функцій та їхніх графіків. Так, термін «тригонометричні функції» запровадив у 1770 р. Г. Є. Кюгель у праці «Аналітична тригонометрія».

Більше часу слід приділити вивченню творчого та життєвого шляху видатного вченого Л. Ейлера, у працях якого тригонометрія набула сучасного вигляду. Він розглядав тригонометричні функції як певний клас аналітичних функцій з дійсними та комплексними аргументами, з'ясував питання про знаки тригонометричних функцій, відкрив зв'язок між тригонометричними та показниковими функціями. Теорію тригонометричних функцій Ейлер вмістив у першому томі своєї книги «Вступ в аналіз нескінченних».

На основі праць Ейлера були складені підручники тригонометрії. Один із перших — підручник тригонометрії М. Є. Головіна.

У XIX ст. питаннями тригонометрії та її викладання займалися видатні російські вчені М. І. Лобачевський і М. В. Остроградський. У праці М. І. Лобачевського «Алгебра або обчислення скінченних» тригонометрія розглядається як область математичного аналізу.

До основних здобутків європейського періоду розвитку тригонометрії слід віднести розвиток аналітичної теорії тригонометричних функцій, значне удосконалення тригонометричної символіки та обґрунтувань, розгляд тригонометричних функцій не тільки кута і дуги, а й і довільних дійсних чисел.

### ТЕМИ ДОСЛІДНИЦЬКИХ РОБІТ УЧНІВ З ІСТОРІЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ

1. Історія тригонометричних таблиць.
2. Тригонометрія у працях Аль-Фарабі та Ібн Сіні.
3. Початки тригонометрії на сфері.
4. Астрономічна школа Улугбека та її внесок у розвиток тригонометрії.
5. Наукові праці з тригонометрії IX–XV століть.
6. Видатний європейський учений Йоган Мюллер (Регіомонтан) і його наукова діяльність з тригонометрії.
7. Історичні віхи розвитку сферичної тригонометрії.
8. Наукові доробки з тригонометрії Насіреддіна Тусі.
9. Тригонометрія і видатний математик Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі.
10. Про методи визначення синуса одного градуса.
11. Життя і наукова діяльність з тригонометрії Абу Райхана аль Біруні.
12. Плоска та сферична тригонометрія як дві складові єдиної науки тригонометрії.
13. Наукова діяльність Леонарда Ейлера з тригонометрії.
14. Тригонометрія як навчальний предмет у загальноосвітній середній школі.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959.— 459 с.
2. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире.— М.: Наука, 1967.— 367 с.
3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1960.— 467 с.
4. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики.— М.: Наука, 1977.— 181 с.
5. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII–VIII классы.— М.: Просвещение, 1982.— 128 с.



6. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X классы.— М.: Просвещение, 1983.— 350 с.
7. История математики: В 3 т.— Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1970.— 350 с.
8. История математики: В 3 т.— Т. 2. Математика XVII столетия / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1970.— 300 с.
9. История математики: В 3 т.— Т. 3. Математика XVIII столетия / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1972.— 494 с.
10. Кэджори Ф. История элементарной математики.— Одесса, 1917.
11. Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии.— Ташкент: Фан, 1990.— 160 с.
12. Раик А. Е. Очерки по истории математики в древности.— 2-е изд.— Саранск: Мордовское книжное изд-во, 1977.— 370 с.
13. Рыбников К. А. История математики.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.— 454 с.
14. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века.— М.—Л.: Гостехтеориздат, 1932.— 230 с.
15. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках.— М.—Л.: ОНТИ, 1938.— 456 с.