

ІРРАЦІОНАЛЬНІСТЬ У РІВНЯННЯХ, НЕРІВНОСТЯХ І АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗАХ

**Програма курсу за вибором для учнів 10 класів
математичного та фізико-математичного профілів**

(можна рекомендувати використовувати також і в класах універсального профілю та в класах з поглибленим вивченням математики)

Автор: *Єргіна Оксана Володимирівна, старший викладач кафедри методики природничо-математичної освіти і технологій Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Степенева функція — одна з найважливіших змістових ліній в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи. Зокрема, у ній розглядаються поняття кореня n -го степеня, його властивості та їх використання для розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей та перетворення виразів, що містять радикали.

Пропонований курс за вибором має на меті надати учням можливість глибше опрацювати деякі питання перетворення ірраціональних виразів, стандартних і нестандартних методів розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, у тому числі з параметром. Крім того, вивчення курсу допоможе учням узагальнити та систематизувати знання, закріпити вміння й навички, набуті при розв'язуванні раціональних рівнянь, нерівностей та їх систем, узагальнити вивчений в основній школі метод інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей для ірраціональних нерівностей. Опрацювання курсу сприятиме більш чіткому розумінню учнями елементарної символіки множин та її грамотному використанню у записі процесу розв'язування рівнянь, нерівностей або систем рівнянь.

Зміст курсу повністю узгоджується з державною програмою з математики для 10-го класу, доповнює і поглиблює її, отже, може бути використаний як у класах з профільним рівнем вивчення математики, так і у класах універсального профілю навчання.

Курс розрахований на 35 годин і може бути опрацьований одночасно з вивченням розділу «Степенева функція» за програмою з математики для 10-го класу відповідно до послідовності вивчення тем зазначеного розділу, якщо навантаження курсу становитиме 2 години на тиждень. Курс може опрацьовуватись і протягом усього навчального року, якщо навантаження становитиме 1 годину на тиждень.

ОРІЄНТОВНИЙ РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ, ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|--|---|---|
| Розділ І. Вирази, що містять радикали (3 год) | | |
| 3 | Тема 1. Властивості арифметичного кореня n-го степеня. ОДЗ змінної ірраціонального виразу Властивості кореня, що забезпечують рівносильність перетворень. Перетворення ірраціональних виразів. Введення допоміжної змінної для перетворення ірраціональних виразів. Звільнення від ірраціональності. | Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • формулює означення кореня і арифметичного кореня n-го степеня; • знає властивості коренів і застосовує їх для обчислення значень ірраціональних виразів та їх перетворень; • правильно знаходить ОДЗ виразів з радикалами та степенями з цілим, раціональним та ірраціональним показниками. |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|---|---|--|
| Розділ II. Ірраціональні рівняння (11 год) | | |
| 1 | <p>Тема 2. Рівносильні рівняння. ОДЗ змінної ірраціонального рівняння</p> <p>Повторення теоретичних відомостей про корінь рівняння, рівносильні рівняння, рівносильні перетворення, ОДЗ змінної рівняння.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i> означення ірраціонального рівняння, рівносильних рівнянь, кореня рівняння, понять «розв'язати рівняння», «рівносильне перетворення», «перевірка кореня»; • <i>вміє знаходити</i> ОДЗ змінної рівняння. |
| 3 | <p>Тема 3. Ірраціональні рівняння, що розв'язуються за означенням арифметичного кореня та властивостями арифметичних дій</p> <p>Розв'язування ірраціональних рівнянь вигляду</p> ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = g(x), \quad {}^{2n}\sqrt{f(x)} = g(x),$ ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = {}^{2n+1}\sqrt{g(x)},$ ${}^{2n}\sqrt{f(x)} = {}^{2n}\sqrt{g(x)},$ $f(x)\sqrt{g(x)} = 0$ та інших з використанням рівносильних перетворень (піднесення до степеня з урахуванням ОДЗ змінної, використання означення і властивостей коренів). | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> основні види ірраціональних рівнянь, що розв'язуються за допомогою рівносильних перетворень; • <i>володіє</i> алгоритмами розв'язування основних видів ірраціональних рівнянь за допомогою рівносильних перетворень і правильно їх застосовує. |
| 4 | <p>Тема 4. Ірраціональні рівняння, що розв'язуються нестандартними методами</p> <p>Метод множення на спряжений вираз. Метод введення допоміжної змінної. Метод заміни ірраціонального рівняння системою раціональних рівнянь. Метод оцінки лівої і правої частин рівняння.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> ірраціональні рівняння, до розв'язування яких треба застосувати нестандартний підхід; |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|-------------|--|---|
| | <p>Окремі види рівнянь, для розв'язування яких достатньо врахувати ОДЗ змінної або властивості функцій у лівій і правій частинах рівняння. Рівняння, що містять радикали різних степенів. Вплив ОДЗ змінної рівняння та перетворень на втрату коренів або появу зайвих.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • <i>використовує</i> методи введення допоміжної змінної, врахування ОДЗ, оцінки лівої і правої частин рівняння, множення на спряжений вираз для розв'язування відповідних видів ірраціональних рівнянь; • <i>орієнтується</i> у випадках появи сторонніх коренів або втрати коренів, враховує це, за необхідності <i>виконує</i> перевірку коренів. |
| 1 | <p>Тема 5. Ірраціональні рівняння, що зводяться до рівнянь з модулем</p> <p>Розв'язування рівнянь, що містять арифметичні квадратні корені, підкореневі вирази яких є повними квадратами.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>уміє</i> виділяти повний квадрат; • <i>розпізнає</i> ірраціональні рівняння, що містять повний квадрат під знаком арифметичного квадратного кореня; • <i>зводить</i> відповідне ірраціональне рівняння до рівняння з модулем і правильно його розв'язує. |
| 2 | <p>Тема 6. Системи ірраціональних рівнянь</p> <p>Розв'язування систем ірраціональних рівнянь різними методами, зокрема тими, що застосовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь. Введення допоміжних змінних при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> системи ірраціональних рівнянь; • <i>орієнтується</i> у виборі методу розв'язування ірраціональних рівнянь; • <i>застосовує</i> обраний метод; • <i>враховує</i> ОДЗ змінних або перевірку розв'язків для отримання правильної відповіді. |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|---|--|---|
| Розділ III. Ірраціональні нерівності (9 год) | | |
| 3 | <p>Тема 7. Розв'язування ірраціональних нерівностей із застосуванням рівносильних перетворень</p> <p>Розв'язування ірраціональних нерівностей вигляду</p> $\sqrt[2n+1]{f(x)} \lesseqgtr g(x),$ $\sqrt[2n]{f(x)} \lesseqgtr g(x),$ $\sqrt[2n]{f(x)} \lesseqgtr \sqrt[2n]{g(x)}.$ | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i> означення ірраціональної нерівності, розв'язку нерівності; • <i>розпізнає</i> нерівності, що розв'язуються за допомогою рівносильних перетворень; • <i>розв'язує</i> зазначені ірраціональні нерівності. |
| 3 | <p>Тема 8. Застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціональних нерівностей</p> <p>Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів. Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i> алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів; • <i>розв'язує</i> ірраціональні нерівності методом інтервалів. |
| 3 | <p>Тема 9. Розв'язування окремих видів ірраціональних нерівностей</p> <p>Нерівності, що розв'язуються нестандартними методами (за допомогою введення допоміжної змінної, оцінки лівої і правої частин рівняння, використання властивостей функцій, знаходження ОДЗ змінної, графічно тощо).</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> ірраціональні нерівності, що розв'язуються нестандартними методами; • <i>орієнтується</i> у виборі нестандартного методу розв'язування нерівностей; • <i>застосовує</i> обрані нестандартні методи до розв'язування відповідних ірраціональних нерівностей; • <i>розв'язує</i> нерівності графічно. |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|--|--|---|
| Розділ IV. Ірраціональні рівняння і нерівності з параметром (8 год) | | |
| 3 | Тема 10. Розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметром аналітично | Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> орієнтується у виборі методу розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметром; розв'язує рівняння і нерівності з параметром аналітично. |
| 3 | Тема 11. Розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметром графічно | Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> розпізнає ірраціональні рівняння і нерівності з параметром, що розв'язуються графічно; розв'язує рівняння і нерівності з параметром графічно. |
| 2 | Тема 12. Застосування ГМТ до розв'язування ірраціональних нерівностей і систем нерівностей з параметром Розв'язування ірраціональних нерівностей з параметром параметрично-координатним методом (у системі координат $(x; a)$, x — змінна, a — параметр). | Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> вміє будувати ГМТ; зводить ірраціональні нерівності або системи нерівностей до таких, що розв'язуються за допомогою ГМТ; розв'язує ірраціональні нерівності і системи нерівностей параметрично-координатним методом. |
| 4 | Резервний час | |

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКЛАДАННЯ КУРСУ

При викладанні даного курсу слід звернути особливу увагу на важливість розуміння учнями понять рівносильного перетворення та перетворення наслідку.

При вивченні теми 4 необхідно розглянути рівняння типу $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x + 8} = \sqrt{x^2 - 11x + 18}$ і $x - 3 + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = \frac{12}{x+3}$, а та-

кож системи рівнянь, що містять такі рівняння, де помилки при використанні властивостей коренів або при внесенні виразу під знак кореня можуть призводити до втрати розв'язків. Розв'язування таких вправ допоможе учням сформулювати уміння і навички використання властиво-

стей $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \sqrt{|b|}$ і $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$ для усіх допустимих значень змін-

них a і b , правила внесення виразу під знак арифметичного кореня парного

степеня: $a \sqrt{a^{2k}} = \begin{cases} \sqrt{a^{2k+2n}}, & a \geq 0, \\ -\sqrt{a^{2k+2n}}, & a < 0 \end{cases}$ ($n \geq 1; k \in \mathbf{Z};$ при $a = 0 \quad k \neq 0$), а також

зрозуміти причину втрати розв'язків при неправильному використанні цих властивостей і правил. На прикладі наведених рівнянь учні мають можливість зрозуміти, як можна втратити розв'язки ірраціонального рівняння або системи рівнянь.

Особливу увагу також треба звернути на ті рівняння, які розв'язуються за допомогою перетворень наслідку, що призводить до появи сторонніх коренів. У таких рівняннях обов'язковою є перевірка коренів підстановкою у вихідне рівняння.

При вивченні теми 8 слід керуватися загальним алгоритмом (узагальненням) розв'язування нерівностей методом інтервалів:

- 1) записати нерівність у вигляді $f(x) \leq 0$;
- 2) знайти область визначення функції $f(x)$;
- 3) знайти корені рівняння $f(x) = 0$;
- 4) знайденими коренями розбити область визначення функції $f(x)$ на проміжки знакосталості;
- 5) з'ясувати знак функції $f(x)$ на кожному з одержаних проміжків;
- 6) залежно від з'ясованих знаків записати розв'язок нерівності.

Резервний час може бути використаний учителем для поточного та підсумкового контролю навчальних досягнень учнів, збільшення годин на вивчення окремих розділів чи тем курсу або доповнення іншими залежно від запитів і можливостей учнів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В., Ясінський В. В. Перші зустрічі з параметрами.— К.: Факт, 2008.— 324 с.
2. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: Навч. посібник.— К.: Либідь, 1990.— 328 с.

3. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Збірник задач з математики з прикладами розв'язань. 7–11 кл.— Кам'янець-Подільський: Абетка, 2002.— 704 с.
4. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями) / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.— 384 с.
5. Горделадзе Ш. Г., Кухарчук М. М., Яремчук Ф. П. Збірник конкурсних задач з математики / За заг. ред. Ф. П. Яремчука.— 3-тє вид., перероб. і доп.— К.: Вища школа, 1988. — 328 с.
6. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко.— М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 240 с.
7. Збірник задач з математики для вступників до вузів / В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві; Пер. з рос. Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Костриці, Л. П. Оніщенко.— 3-тє вид., стер.— К.: Вища школа, 1996.— 445 с.
8. Ляпин С. Е. и др. Сборник задач по элементарной алгебре. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факульт. пед. ин-тов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Просвещение, 1973. — 351 с.
9. Практикум по решению задач по математике / В. И. Михайловский, В. Е. Тарасюк, Е. А. Ченакал и др.— К.: Вища школа, 1975.— 424 с. (на українському мові).
10. Петров К. Сборник задач по алгебре: Кн. для учителя.— Пер. с болг.— М.: Просвещение, 1984.— 208 с.
11. Роганін О. М., Каплун О. І. Математика: Практичний довідник.— Х.: ФОП Співак Т. К., 2009.— 416 с.
12. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів серед. закладів освіти / За ред. М. Й. Ядренка.— 2-ге вид., випр. і доп.— К.: Техніка, 2003.— 591 с.
13. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства: пособие для подготовительных отделений.— К.: Вища школа, 1981.— 315 с.
14. Ясінський В. В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / За ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника.— К.: НТУУ «КПІ», 2005.— 372 с.— (Серія «На допомогу абітурієнту»).