

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Програма курсу за вибором для учнів 10 класів математичного та фізико-математичного профілів

(можна рекомендувати використовувати також і в класах універсального профілю та в класах з поглибленим вивченням математики)

Автор: *Грицик Тетяна Андріївна, викладач математики ВНЗ «Надслучанський інститут» м. Березне Рівненської області*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Курс присвячений оберненим тригонометричним функціям, які є логічним продовженням вчення про прямі тригонометричні функції. Питання про прямі та обернені тригонометричні функції взаємопов'язані, їх комплексне вивчення під час опрацювання даного курсу поглиблює внутрішньопредметні математичні зв'язки, сприяє узагальненню та систематизації знань учнів з тригонометрії.

Вивчення обернених тригонометричних функцій є важливим для подальшого розвитку функціональної змістової лінії курсу алгебри і початків аналізу середньої школи. На прикладі аркфункцій культивується важливе поняття оберненої функції, демонструються загальні властивості функцій (парність і непарність, обмеженість, монотонність, неперервність та ін.). На матеріалі аркфункцій подальшого розвитку набуває обчислювальна змістова лінія, вдосконалюються обчислювальні навички й уміння учнів. Значну увагу на заняттях слід приділити «техніці» тождних перетворень виразів з аркфункціями. Ці перетворення важливі як з освітньої точки зору (вони необхідні для успішного розв'язування рівнянь, нерівностей з аркфункціями, спрощення громіздких виразів), так і з виховної та розвивальної (розвиток пам'яті, логічного мислення, виховання алгоритмічної культури, акуратності та чіткості при записах). Під час розв'язування рівнянь та нерівностей з аркфункціями систематизуються відомі учням методи розв'язування алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а також розглядаються нові прийоми, які визначаються специфікою обернених тригонометричних функцій. Рівняння та нерівності з аркфункціями створюють широкі можливості для розвитку творчого, нестандартного мислення, процес їх розв'язування є цікавим і повчальним для учнів.

Мета курсу — розвинути творче, нестандартне мислення учнів, реалізувати їх математичні здібності, задовольнити пізнавальні інтереси.

Завдання курсу:

- поглибити та розширити знання учнів про обернені тригонометричні функції;
- вдосконалити практичні вміння учнів здійснювати тотожні перетворення виразів, розв'язувати рівняння, системи рівнянь, нерівності з аркфункціями;
- узагальнити й систематизувати знання учнів з тригонометрії;
- підготувати учнів до навчання у вищих навчальних закладах математичного спрямування.

Під час опрацювання курсу доцільно застосовувати інформаційні, дискусійні, евристичні методи навчання; проводити навчальні заняття в різноманітних формах — лекції, практичні заняття, комбіновані уроки. Підсумкове заняття варто присвятити розв'язуванню задач підвищеної складності.

Курс розрахований на учнів 10-х класів математичних, фізико-математичних профілів після систематичного вивчення тригонометричного матеріалу. Орієнтовний термін вивчення курсу — 16 (17) годин протягом останньої чверті навчального року (2 години на тиждень).

Засоби навчання: список рекомендованої літератури [1]–[10]. Вивчення курсу доцільно супроводжувати комп'ютерною підтримкою (програмні засоби: GRAN1, DERIVE, EUREKA та ін.), що унаочнює навчальний процес, сприяє розвитку образного мислення, графічної культури учнів.

Форми контролю рівня навчальних досягнень вчитель обирає самостійно.

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

| № з/п | Тема | Кількість годин |
|-------|--|-----------------|
| 1 | Обернені тригонометричні функції, їх графіки і властивості (повторення) | 1 |
| 2 | Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями | 3 |
| 3 | Рівняння з оберненими тригонометричними функціями | 4 |
| 4 | Системи рівнянь з оберненими тригонометричними функціями | 2 |
| 5 | Нерівності з оберненими тригонометричними функціями | 3 |
| 6 | Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій | 3 |
| 7 | Підсумкове заняття | (1) |
| | РАЗОМ | 16 (17) |

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|-------------|--|--|
| 1 | <p>Тема 1. Обернені тригонометричні функції, їх графіки і властивості (повторення)</p> <p>Означення обернених тригонометричних функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \text{arcctg } x$. Властивості обернених тригонометричних функцій (область визначення, множина значень, монотонність, парність і непарність, найбільше і найменше значення та ін.).</p> <p>Графіки обернених тригонометричних функцій.</p> <p>Табличні значення арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса.</p> <p>Тотожності</p> $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$ $x \in [-1; 1] \quad (1);$ $\arctg x + \text{arcctg } x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (2).$ | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>наводить</i> означення обернених тригонометричних функцій; • <i>теоретично обґрунтовує</i> властивості обернених тригонометричних функцій; • <i>обчислює</i> значення виразів з оберненими тригонометричними функціями, використовуючи табличні значення аркфункцій; • <i>застосовує</i> тотожності (1) і (2) для спрощення виразів з оберненими тригонометричними функціями; • <i>досліджує</i> функції, аналітичні вирази яких містять символи \arcsin, \arccos, \arctg, arcctg, та <i>будує</i> їх графіки. |
| 3 | <p>Тема 2. Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями</p> <p>Формули для обчислення значень обернених тригонометричних функцій за значеннями тригонометричних функцій.</p> <p>Формули зв'язку між оберненими тригонометричними функціями.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>називає</i> раніше вивчені формули тригонометрії; • <i>доводить</i> співвідношення між оберненими тригонометричними функціями; • <i>виражає</i> довільну обернену тригонометричну функцію через інші аркфункції; |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|-------------|--|--|
| | <p>Обчислення значень тригонометричних функцій за значеннями їх аркфункцій.</p> <p>Формули додавання і віднімання для однойменних аркфункцій.</p> <p>Формули для обчислення синуса, косинуса, тангенса і котангенса від половинних та подвоєних значень обернених тригонометричних функцій.</p> <p>Перетворення виразів з аркфункціями.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • <i>обчислює</i> значення аркфункцій через значення тригонометричних функцій; значення тригонометричних функцій за значеннями їх аркфункцій; • <i>додає та віднімає</i> однойменні та різнойменні обернені тригонометричні функції; • <i>застосовує</i> співвідношення між оберненими тригонометричними функціями для спрощення, обчислення, оцінки виразів, доведення тотожностей з аркфункціями. |
| 4 | <p>Тема 3. Рівняння з оберненими тригонометричними функціями</p> <p>Рівняння з аркфункціями, їх типи. Методи та способи розв'язування рівнянь з аркфункціями: 1) визначення області допустимих значень рівняння; 2) застосування властивостей функцій; 3) оцінка області значень лівої і правої частини рівняння; 4) заміна змінної; 5) застосування тригонометричних формул; 6) обчислення тригонометричних функцій від обох частин рівняння; 7) графічний метод.</p> <p>Втрата коренів та поява сторонніх коренів у рівняннях з аркфункціями.</p> <p>Параметр в рівняннях з аркфункціями.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розв'язує</i> найпростіші рівняння з оберненими тригонометричними функціями типу $f(x) = a$, де $f(x)$ — одна з обернених тригонометричних функцій, a — дійсне число; • <i>раціонально обирає</i> методи розв'язування рівнянь з аркфункціями; • <i>оцінює</i> область визначення та області значень лівої і правої частин рівняння з аркфункціями; • <i>виконує</i> рівносильні перетворення рівнянь з аркфункціями і теоретично їх <i>обґрунтовує</i>; • <i>виконує</i> перевірку коренів рівняння з аркфункціями. |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|-------------|--|--|
| 2 | <p>Тема 4. Системи рівнянь з оберненими тригонометричними функціями</p> <p>Поняття системи рівнянь з аркфункціями. Приклади систем рівнянь з аркфункціями.</p> <p>Загальні та спеціальні прийоми і методи розв'язування систем рівнянь з аркфункціями (<i>загальні</i>: метод заміни змінних; спосіб підстановки; графічний метод; оцінка ОДЗ і множин значень рівнянь систем; <i>спеціальні</i> (мають місце лише для аркфункцій): застосування тригонометричних формул, співвідношень між аркфункціями; знаходження аркфункції від обох частин рівняння системи).</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>описує</i> зміст понять: система рівнянь, розв'язок системи рівнянь, рівносильність систем рівнянь; • <i>розв'язує</i> системи рівнянь з аркфункціями, обираючи доцільні методи; • <i>розв'язує</i> системи рівнянь, що містять аркфункції: <ol style="list-style-type: none"> 1) лише в одному рівнянні; 2) в усіх рівняннях системи. |
| 3 | <p>Тема 5. Нерівності з оберненими тригонометричними функціями</p> <p>Найпростіші нерівності з аркфункціями. Методи та способи розв'язування нерівностей з аркфункціями: метод заміни змінних, спосіб порівняння одноїменних аркфункцій, метод інтервалів, спосіб знаходження від обох частин нерівності тригонометричної функції.</p> <p>Доведення нерівностей з аркфункціями. Стандартні та спеціальні (характерні лише для аркфункцій) прийоми доведення нерівностей з аркфункціями.</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розв'язує</i> найпростіші нерівності з аркфункціями типу $f(x) \geq a$, $f(x) \leq a$, $f(x) > a$, $f(x) < a$, де $f(x)$ — одна з аркфункцій; • <i>характеризує</i> різні методи розв'язування нерівностей з аркфункціями; • <i>розв'язує</i> нерівності з аркфункціями, обираючи раціональні способи; • <i>доводить</i> нерівності з аркфункціями. |

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|-------------|---|---|
| 3 | <p>Тема 6. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій</p> <p>Методи побудови графіків функцій, аналітичні вирази яких містять аркфункції: метод геометричних перетворень; метод попереднього дослідження функції; метод попереднього перетворення функції з використанням формул і властивостей.</p> <p>Побудова графіків функцій, що є складеними з тригонометричних функцій та аркфункцій.</p> <p>Знаходження кількості коренів рівняння з аркфункціями графічно.</p> <p>Геометричне місце точок, аналітичний вираз якого містить обернені тригонометричні функції</p> | <p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>характеризує</i> загальні методи та способи побудови графіків функцій, а також спеціальні методи, характерні для аркфункцій; • <i>будує</i> графіки функцій, аналітичні вирази яких містять аркфункції, методом геометричних перетворень; • <i>досліджує та перетворює</i> аналітичні вирази з аркфункціями для їх графічного зображення; • <i>пояснює</i> зміст поняття «геометричне місце точок площини»; • <i>зображує</i> геометричне місце точок (ГМТ), аналітичний вираз якого містить символи аркфункцій. |
| (1) | Підсумкове заняття | |

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

| Номер заняття | Дата | Тема заняття | Форма проведення |
|---------------|------|--|-------------------|
| 1 | | Вступ до курсу. Обернені тригонометричні функції. Розв'язування вправ | Практичне заняття |
| 2 | | Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями | Лекційне заняття |
| 3 | | Обчислення значень аркфункцій через значення тригонометричних функцій; значень тригонометричних функцій через значення аркфункцій. Вираження оберненої тригонометричної функції через інші | Практичне заняття |

| Номер заняття | Дата | Тема заняття | Форма проведення |
|---------------|------|--|---------------------|
| 4 | | Формули додавання і віднімання для аркфункцій. Перетворення виразів з аркфункціями. Самостійна робота. Розв'язування завдань підвищеної складності | Практичне заняття |
| 5–6 | | Рівняння з оберненими тригонометричними функціями. Типи та методи розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями | Комбіноване заняття |
| 7 | | Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями, що містять параметр. Самостійна робота | Практичне заняття |
| 8 | | Розв'язування ускладнених рівнянь з оберненими тригонометричними функціями | Практичне заняття |
| 9 | | Системи рівнянь з оберненими тригонометричними функціями | Комбіноване заняття |
| 10 | | Прийоми та методи розв'язування систем рівнянь з аркфункціями | Практичне заняття |
| 11 | | Нерівності з оберненими тригонометричними функціями | Лекційне заняття |
| 12–13 | | Розв'язування нерівностей з аркфункціями різними методами та способами. Самостійна робота. Доведення нерівностей з аркфункціями | Практичне заняття |
| 14 | | Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій | Лекційне заняття |
| 15 | | Методи побудови графіків функцій, аналітичні вирази яких містять аркфункції. Розв'язування вправ | Практичне заняття |
| 16 | | Геометричне місце точок, аналітичний вираз якого включає обернені тригонометричні функції. Самостійна робота | Практичне заняття |
| (17) | | Підсумкове заняття. Узагальнення та систематизація навчального матеріалу | Узагальнює заняття |

**ОРІЄНТОВНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ
НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ**

1. Знайти область визначення функції $y = \arcsin \frac{x-1}{2} - \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.
2. Дослідити функцію $y = 2 \operatorname{arctg} x - \pi$ на парність або непарність.
3. Розташувати за зростанням числа: $\arccos(-0,8)$; $3 \operatorname{arctg} 0,6$; $\operatorname{arctg} 5$; $\arccos 0,9$; $\arcsin 0,6$.
4. Обчислити:
 - а) $\cos\left(\arcsin \frac{2}{5} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
 - б) $\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$;
 - в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$;
 - г) $\arccos\left(\cos\left(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right)\right)$;
 - д) $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}\right) + \cos^6\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5}\right)$;
 - е) $\sin^2\left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos 0,5\right)$.
5. Розв'язати рівняння:
 - а) $\arcsin(x-1) = \frac{4\pi}{7}$;
 - б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}$;
 - в) $\arccos^2 x - \frac{3\pi}{4} \arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0$;
 - г) $\cos(\arcsin x) = \sin(\operatorname{arctg} x)$;
 - д) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$;
 - е) $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.
6. Скільки розв'язків має рівняння $x \operatorname{arctg} x - 1 = 0$?

7. Розв'язати системи рівнянь:

$$а) \begin{cases} x + y = 0,5, \\ \arcsin x + \arccos y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y = \frac{\pi}{6}, \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}^2 y = \frac{\pi^2}{9}. \end{cases}$$

8. Розв'язати нерівності:

$$а) \arcsin x \leq \frac{\pi}{8};$$

$$б) \arccos(x^2 - 4x + 5) < 4x - x^2;$$

$$в) \operatorname{arctg}^2 x - 5 \operatorname{arctg} x + 6 < 0;$$

$$г) 3 \arcsin x - \arccos x > \frac{\pi}{2};$$

$$д) \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) > \sin(\operatorname{arctg} x);$$

$$е) \arccos x \geq x + \frac{\pi}{2}.$$

9. Побудувати графіки функцій:

$$а) y = \arcsin(|x| - 2);$$

$$б) y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x;$$

$$в) y = \cos(2 \arcsin x);$$

$$г) y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

10. Знайти геометричне місце точок:

$$а) \operatorname{arctg}|x| \leq y < \operatorname{arcctg} x;$$

$$б) \arcsin x = -\arccos y.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Тригонометрія. Довідник-задачник.— К.: Магістр-S, 1997.— 256 с.
2. Гетьманцев В. Д., Саушкін О. Ф. Математика: Тригонометрія.— К.: Либідь, 1994.— 144 с.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: Навч. посіб.— К.: Вища школа, 2001.— 432 с.

4. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб.— К.: МАУП, 2004.— 456 с.
5. Истер А. С. Аркфункция от А до Я.— К.: Факт, 1998.— 160 с.
6. Конет І. М. Тригонометрія: теорія і практика: посібник / Кам'янець-Подільський держ. ун-т.— Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006.— 243 с.
7. Алгебра. Пробний підручник для 10 класу шкіл, ліцеїв та гімназій фізико-математичного профілю / В. Р. Кравчук, В. М. Козира, Я. Ф. Гап'юк, Я. Т. Гринчишин.— Тернопіль: Підручники і посібники, 1997.— 256 с.
8. Кушнир И. А. Тригонометрия: задачи и решения.— К.: Астарта, 1997.— 390 с.
9. Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір.— К.: Генеза, 2008.— 352 с.
10. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. закладах освіти.— К.: Освіта, 2004.— 318 с.