ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Програма факультативного курсу для учнів 8–11 класів з поглибленим вивченням математики

Автор: ***Рудик Олександр Борисович****, доцент Київського університету імені Бориса Грінченка, кандидат фізико-математичних наук, заслужений учитель України*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Тривалість навчання: 4 роки (8–11 класи).

Розподіл навантаження: 2 години на тиждень, щороку — 68 годин, на весь курс — 272 години. При цьому учні повинні мати можливість додаткової самостійної роботи за комп'ютером протягом 2 годин на тиждень. Допускається перерозподіл навчальних годин між темами — до 20 % часу на кожну тему. Програму можна використовувати з розрахунку 3 години на тиждень з пропорційним збільшенням годин на кожну тему і детальнішим розглядом задач (як поданих у програмі, так і підібраних з інших джерел).

Кількість тем: 11.

Мета курсу:

- розвинути логічне мислення і зв'язне мовлення учнів;
- закріпити базові математичні поняття на рівні практичного використання до програмної реалізації включно;
- за наявності відповідних психологічних характеристик — підготувати учня до участі в олімпіаді з інформатики.

Перед вивченням курсу учні повинні мати стійкі навички пошуку, редагування, збереження, копіювання файлів на жорсткий диск та інші носії інформації. Тема «Алгоритмічна мова» вивчається оглядово і лише для того, щоб учні знали як користуватися довідниковими інформаційними системами і літературою під час опанування наступних тем. Вивчення математичного апарату тем курсу має здійснюватися на уроках математики й випереджати розгляд цих тем при вивченні даного курсу — курсу практичного використання і програмної реалізації базових понять елементарної математики.

Орієнтовне календарне планування не подається, оскільки:

- поданий курс є найважчим для сприйняття та опанування (див. чисельність учасників та результати учнівських олімпіад з інформатики);
- рівень підготовки учнів (здатність формулювати, запам'ятовувати й програмно реалізувати алгоритми, опанування математичної теорії) настільки відрізняється у різні роки навіть в одному навчальному закладі, що дозволяє в одних класах викладати зі швидкістю (кількість питань / задач за час, відведений на тему), удвічі більшою, ніж в інших.

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

№ з/п	Тема	Кількість годин
	8 КЛАС	
1	Алгоритмічна мова	8
2	Математична логіка	20
3	Комбінаторика	40
	9 КЛАС	
4	Цілі числа і кільце многочленів. Подільність	46
5	Оптимізація перебору	14
6	Дійсні числа	8
	10 КЛАС	
7	Планіметрія	24
8	Стереометрія	24
9	Методи оптимізації	20
	11 КЛАС	
10	Графи	36
11	Теорія ігор	32
	РАЗОМ	**272**

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

8 КЛАС

Тема 1. Алгоритмічна мова *(8 год)*

Абетка. Структура програми. Прості типи змінних. Сталі. Арифметичні й логічні функції. Оператори. Порядок виконання дій. Умовні оператори. Цикли. Структуровані типи змінних. Поняття про динамічні структури даних. Процедури і функції. Введення і виведення даних. Робота з файлами. Примітивна графіка. Рекурсивні функції та процедури. Інтегроване середовище програмування.

Тема 2. Математична логіка *(20 год)*

Найпростіші булеві функції. Нормальна форма булевої функції. Відновлення запису арифметичної дії з цілими числами. Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій).

Тема 3. Комбінаторика *(40 год)*

Впорядкування чисел. Перестановки, розташування й комбінації: обчислення кількості й перебір. Реалізація невідомої наперед кількості вкладених циклів однією групою операторів. Нормальна форма булевої функції (до 26 аргументів) змінних. Період підстановки. Рекурентні співвідношення. Найдовша спільна підпослідовність двох послідовностей.

9 КЛАС

Тема 4. Цілі числа і кільце многочленів. Подільність *(46 год)*

Ділення цілих чисел з остачею. Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда. Найменше спільне кратне. Решето Ератосфена (реалізація за допомогою множин). Розклад на прості множники. Кількість дільників натурального числа. Класи еквівалентності остач. Позиційна система числення. Перехід від однієї системи числення до іншої. База мішаної системи числення. Факторіали і числа Фібоначчі як база системи числення. Перехід від багатовимірного масиву до лінійного і навпаки. Арифметичні дії з раціональними й багатоцифровими натуральними числами. Рекурентні співвідношення й різні системи числення. Десятковий запис дробу. Ланцюгові дроби. Многочлени однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Найбільший спільний дільник многочленів. Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Схема Ґорнера (в тому числі для многочленів з раціональними коефіцієнтами й аргументами). Сума k-х степенів перших n натуральних чисел як многочлен змінної n. Числа Бернуллі.

Тема 5. Оптимізація перебору *(14 год)*

Відновлення запису арифметичних дій з цілими числами. Сюжетні задачі логічного характеру з невідомою наперед кількістю персонажів.

Тема 6. Дійсні числа *(8 год)*

Подання дійсного числа в ПК. Арифметичний корінь. Наближене розв’язування нелінійних рівнянь відносно однієї змінної.

10 КЛАС

Тема 7. Планіметрія *(24 год)*

Визначення кута за його тригонометричними функціями. Перехід до екранних координат. Рівняння прямої. Симетрія відносно точки і прямої. Площа трикутника і многокутника. Взаємне розміщення точки і трикутника, точки і многокутника (порівняння різних методів: кратність кількості перетинів, кут обертання радіуса-вектора, обчислення площ). Обхід опуклого многокутника за периметром. Система лінійних невироджених рівнянь двох змінних. Сукупність прямокутників, сторони яких паралельні осям координат: площа і периметр об’єднання, перетину. Класифікація точок опуклого многокутника.

Тема 8. Стереометрія *(24 год)*

Координатний простір. Рівняння площини і прямої. Кути між площинами, між прямими, між прямою та площиною. Паралельна і центральна проекції. Рух геометричних тіл. Векторний і мішаний добуток. Системи лінійних невироджених рівнянь трьох змінних. Модель многогранника для побудови перерізу площиною. Відстань на поверхні многогранника (на прикладі куба). Класифікація точок опуклого многогранника. Розбиття опуклого многогранника на трикутні піраміди без спільних внутрішніх точок.

Тема 9. Методи оптимізації *(20 год)*

Поняття про лінійне та опукле програмування функцій однієї і двох змінних, симплекс-метод. Метод динамічного програмування для скінченного простору станів (оптимальне розміщення капіталу і придбання наборів товарів). Задача комівояжера.

11 КЛАС

Тема 10. Графи *(36 год)*

Вершина, ребро і дуга графа. Зв'язність. Матриця суміжності, її незірковість. Кількість маршрутів. Найкоротший шлях. Модель лабіринту. Вершини графа, які неможливо уникнути на шляху між даними вершинами. Розбиття графа на компоненти. Граф як модель многогранника для побудови та аналізу розгорток.

Тема 11. Теорія ігор *(32 год)*

Скінченні ігри з антагоністичними інтересами і повною інформацією. Поняття стратегії. Аналіз графа гри «з кінця». Класифікація позицій гри. Функціонал Шпраґе — Ґранді. «Симетричні» стратегії. Ізоморфізм ігор. Перехід від неперервного простору станів до дискретного. Тлумачення парадокса гри «стоніжка».

ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

Після вивчення теми 1 учень (учениця):

- *здійснює* елементарне налаштування інтегрованого середовища програмування;
- *знаходить* опис і приклади використання стандартних процедур і функцій, користуючись довідковою системою інтегрованого середовища програмування.

Після вивчення тем 2–11 учень (учениця):

- *пояснює* алгоритми розв'язування розглянутих базових задач, поданих як питання для теоретичного вивчення або як додаткові задачі (див. далі);

- *наводить приклади* ефективного використання ресурсів у розв'язаннях базових задачах;
- *виявляє та усуває* двозначності з умов;
- *формулює* технічні умови для розв'язань;
- *тестує* розв'язання базових задач;
- *створює* програми для розв'язування задач — базових і однакових з ними за складністю, з тими самими математичними основами. Програми мають задовольняти такі вимоги:
  – повідомляється уточнена умова задачі;
  – передбачено вибір способу задання даних — з файлу чи клавіатури;
  – для задач теми 2 «Математична логіка» параметри перевіряються на належність області допустимих значень з метою уникнення ділення на нуль, знаходження квадратного кореня з від'ємного числа тощо;
  – наявність ілюстрації до розв'язання задачі з геометричним змістом;
  – коментар розв'язання;
  – змістовність назв або їх коментар;
  – задачі на реалізацію гри передбачають як режим демонстрації для двох гравців-людей, так і гру «людина — програма». В останньому випадку програма реалізує виграшну стратегію або, не погіршуючи свого становища і відтягуючи кінець гри, очікує на помилку суперника, що створить виграшну позицію для програми. Але в усіх випадках передбачається перевірка коректності ходу.

ЗАДАЧІ ДО ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

1. З'ясувати, яка з двох дат передує іншій.
2. Розв'язати рівняння:

   а) $ax+b=0$; б) $\frac{a}{x}+b=0$; в) $ax^2+bx+c=0$; г) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c=0$.
3. З'ясувати, чи має прямокутний паралелепіпед з ребрами a, b, c грань, яка: а) містить квадрат; б) міститься у квадраті зі стороною d.
4. Знайти взаємне розташування відрізків $[a; b]$ і $[c; d]$ на числовій прямій.
5. Чи існує трикутник з даною градусною мірою двох внутрішніх кутів? Визначити його вид.
6. Чи існує трикутник з даними квадратами довжин сторін? Визначити його вид.

7. Чи існує чоторикутник з даними довжинами сторін? Чи може він бути паралелограмом?

8. Скільки різних трикутників (взагалі і з точністю до рухів площини) можна утворити з відрізків даної довжини (з вилученням і без вилучення останніх відповідно).

9. Визначити тип впорядкованості даної послідовності чисел.

10. Обчислити ціну телеграми за її текстом. Числівники записати словами.

11. Роздрукувати текст із файлу без переносів, «рваних країв» завдовжки не більше за 60 символів у рядку.

12. Впорядкувати за частотою вживання сполучення з 1, 2 та 3 символів, які зустрічаються в даному тексті.

13. Записати дане натуральне число n порядковим числівником у вказаному роді й відмінку, $n<10^9$.

14. Здійснити транслітерацію (подання літер та їх сполучень відповідними літерами та сполученнями) української абетки латиницею і навпаки.

15. Знайти найменше та найбільше числа, які можна подати сумами (можливо, і всіх) елементів даного масиву.

16. З'ясувати кінцевий стан термостату, який містить лід і розплавлений свинець.

17. Вгадати натуральне число, яке не перевищує n, задавши якнайменше запитань, відповідями на які є слова «так» чи «ні».

18. Чотири куби однакові на вигляд. Два з них мають однакову вагу, два інші — легші і теж мають однакову вагу. Скільки знадобиться зважувань на шалькових терезах без гир, щоб відокремити важчі куби?

19. Серед 80 однакових на вигляд монет одна фальшива (вона легша). Як за допомогою чотириразового використання шалькових терезів без гир знайти фальшиву монету?

20. Є 27 рівних кубів одного кольору. 26 з них мають однакову вагу. Як за допомогою найменшої можливої кількості зважувань на терезах без гир відокремити куб, вага якого відрізняється від ваги інших, і дізнатися, важчий він чи легший від інших кубів?

21. Серед шести кубів однакового розміру і однакового кольору три мають однакову вагу і є важчими від решти кубів, які також мають однакову вагу. Скільки зважувань на шалькових терезах без гир треба здійснити, щоб відокремити важчі куби?

КОМБІНАТОРИКА

22. Впорядкувати послідовність українських слів в алфавітному порядку.
23. Впорядкувати за частотою вживання сполучення з 1, 2 та 3 літер у даному тексті.
24. З’ясувати, чи задає дана послідовність перестановку.
25. Визначити, якою перестановкою одну послідовність отримано з іншої.
26. Нехай послідовність $T=\{t_j\}$ побудовано за деякою перестановкою P множини $\{1, 2, ..., n\}$ таким чином: t_j — кількість чисел перестановки P, які стоять ліворуч від числа j і більші за нього. Відновити перестановку P.
27. У числовій послідовності вказати найдовшу підпослідовність, яка є арифметичною прогресією.
28. З членів послідовності утворити найдовшу арифметичну прогресію.
29. З’ясувати, чи можна прямокутник (паралелепіпед) з даними довжинами сторін скласти (без розрізання) з прямокутників (паралелепіпедів) з даними довжинами сторін. Скількома способами це можна зробити?
30. З даних слів сформувати чайнворд.
31. Розв’язати даний кросворд, знаючи слова-відповіді, але не знаючи їх розташування.
32. З даних слів сформувати кросворд. Те саме для кросворду з двома осями симетрії.
33. Побудувати всі квадратні матриці розміром $n \times n$, в яких у кожному рядку, стовпчику та на обох діагоналях розташовані всі натуральні числа від 1 до n. Указати найбільшу групу таких матриць, що не отримуються одна з одної поворотами та осьовими симетріями.
34. На кожну клітинку прямокутної таблиці розміром $n \times m$ покладено не більше ніж M монет. Рухаючи пішака вгору чи праворуч, забирають усі монети з-під нього. Як зібрати найбільше монет, рухаючись з нижньої лівої клітинки до верхньої правої?
35. Розв’язати японський кросворд.
36. За відомими результатами футбольного турніру (можливо, незакінченого) з’ясувати, яке найвище місце може посісти певна команда.

37. На шахівниці розміром $m \times n$ розташувати певні шахові фігури таким чином, щоб жодна з них не знаходилася під боєм іншої.

38. Скількома способами можна подати натуральне число у вигляді суми даних натуральних чисел з повторенням (задача про розмін монет)?

39. Скільки існує n-цифрових чисел, сума всіх цифр яких дорівнює m?

40. Елементи масиву розділити на дві групи таким чином, щоб абсолютна різниця сум елементів цих груп була найменшою.

41. Яку множину чисел можна отримати з даного набору раціональних чисел, використавши не більше ніж k арифметичних дій.

42. Впорядкувати за зростанням нескоротні дроби, які лежать в даному проміжку числової прямої $[a; b]$ і знаменник яких не перевищує дане натуральне число n.

ЦІЛІ ЧИСЛА

43. Записати дане натуральне число у римській системі числення.
44. За відомим записом натурального числа римськими цифрами відновити його запис у десятковій системі числення.
45. Обчислити чисельник і знаменник нескоротного дробу, який дорівнює:
а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$; б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.
46. Обчислити:
а) n^m; б) $n!$; в) $C_n^k=\frac{n!}{k!}(n-k)!$.
47. Для натурального n з'ясувати, чи можна $n!$ подати у вигляді добутку k послідовних натуральних чисел.
48. Знайти j-цифрове натуральне число у системі числення з основою p, k-й степінь суми цифр якого дорівнює йому самому.
49. З'ясувати, скільки існує j-цифрових чисел: а) з даними остачами при діленні на дані числа; б) остачі яких при діленні на дані цілі числа рівні.
50. У старояпонському календарі кожен з 12 послідовних років має назву звіра (пацюк, бик, тигр, заєць, дракон, змія, кінь, вівця, мавпа, півень, собака, кабан), а кожен з 5 — має колір (зелений, червоний, жовтий, синій, чорний). З'ясувати, яка назва року n, якщо 1984 — рік зеленого пацюка.
51. Нескінченні арифметичні прогресії натуральних чисел задано першими двома членами. Знайти найменший спільний член усіх прогресій.

52. Для натурального n обчислити значення функції $f(n)$, заданої рекурентно: $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2n)=f(n)$, $f(2n+1)=f(n)+f(n+1)$.

53. Даний звичайний дріб подати у вигляді суми (єгипетських) дробів, чисельники яких дорівнюють 1.

МНОГОЧЛЕНИ

Нехай многочлен подано рядком тексту: $2*x\hat{}5-4*x\hat{}100+6$ для $2x^2-4x^{100}+6$. Виконати такі завдання.

54. Звести подібні доданки у записі многочлена.

55. Визначити степінь і коефіцієнти многочлена.

56. Записати даний многочлен за зростанням степенів.

57. Записати суму даних одночленів за спаданням степенів.

ДІЙСНІ ЧИСЛА

58. Не використовуючи подання чисел масивами, для дійсного x і натурального n обчислити:
а) $x(x+1)\ldots(x+n-1)$;
б) $(x+1)(x+3)\ldots(x+2n-1):(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)$.

59. Для дійсного x та натурального n обчислити наближене значення $e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ і порівняти з точним значенням.

60. Побудувати лінійний і квадратичний сплакни функції, графік якої містить дані точки координатної площини.

61. Для неперервної функції f: $(0;1)\to(0;1)$ з'ясувати, для яких натуральних k існує розв'язок рівняння $x=f\left(f\left(\ldots\cdot f(x)\ldots\right)\right)$, що не є розв'язком цього ж рівняння для менших значень k. Для прикладу розглянути $k=1$, 2, 3, ..., 33, $f(x)=ax(1-x)$, де $1<a<4$. Побудувати графік залежності розв'язків рівнянь від величини a.

ПЛАНІМЕТРІЯ

62. Визначити, якою нерівністю задається півплощина, що містить точку з даними координатами і обмежена прямою, яка проходить через дві дані різні точки з відомими координатами.

63. За сторонами трикутника обчислити його площу, кути, медіани, висоти, бісектриси, радіуси вписаного, описаного і зовнівписаних кіл; бісектриси внутрішніх кутів.

64. Обчислити сторони трикутника за:
а) його висотами; б) його медіанами.

65. За координатами вершин опуклого чотирикутника встановити:
    а) його вид (квадрат, ромб, прямокутник, паралелограм, трапеція);
    б) чи є він вписаним;
    в) чи є він описаним.

66. З'ясувати, чи є многокутник з даними координатами вершин опуклим.

67. Побудувати коло, що дотикається до трьох даних кіл координатної площини (задача Аполонія).

68. Зобразти частину графіка функції чи кривої (еліпса, параболи, гіперболи, спіралі, циклоїди тощо), розташованого у даному прямокутнику координатної площини зі сторонами, що паралельні осям координат. Реалізувати керування параметрами кривої та її повторну побудову без переривання виконання програми.

ТЕОРІЯ ІГОР

69. Гра «Хрестики-нулики» проводиться на квадратному полі, що містить 9 квадратних клітин. Два гравці по черзі заповнюють вільні клітини: перший — хрестиком, другий — нуликом. Переможцем вважається той, хто першим заповнить своїми символами горизонталь, вертикаль або діагональ з трьох квадратів. Якщо це не вдалося нікому, то гра закінчується унічию.

70. Гра «9 цифр». На столі лежать 9 карток, на кожній з яких написано одну з цифр від 1 до 9 включно. Цифри на різних картках різні. Картки лежать написами догори. Два гравці по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки, сума цифр на яких дорівнює 15 (на руках у переможця можуть бути й інші картки).

71. Гра «9 слів». На столі лежать 9 карток, кожна з яких містить одне із слів: Лорен, какао, місто, хек, ліс, рама, Ала, меч, рік. Слова на різних картках різні. Картки лежать написами догори. Два гравці по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки зі словами, що мають одну спільну літеру (на руках у переможця можуть бути й інші картки).

72. Гра «9 шляхів». 8 міст, позначених на карті першими літерами латиниці, сполучають 9 доріг, що проходять відповідно через міста *AEH, AF, ADG, BE, BDFH, BG, CDE, CF, CGH*. Два гравці по черзі зафарбовують своїм кольором (червоним або синім) позначення шляхів на карті. Переможцем вважається той, хто перший зафарбує своїм кольором позначення всіх доріг, які проходять через одне місто.

73. Гра Баше*. У початковий момент в купці є n предметів. Два гравці по черзі забирають з цієї купки предмети (від 1 до p включно). Переможцем вважається той, хто примусить суперника зробити останній хід.

74. Гра «На стежині». На кінцях стежини, розбитої на m клітин, стоять шашки різного кольору. Два гравці по черзі рухають шашку певного кольору на вільну клітину на довільну кількість клітин в межах від 1 до p включно в довільному напрямку, але без перескакування шашки суперника й виходу за межі стежини. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

75. Певну кількість фішок розташовано в ряд. Два гравці по черзі забирають довільні 1 або 2 фішки, які стоять поруч. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

76. Певну кількість фішок розташовано по колу. Два гравці по черзі забирають довільні 1 або 2 фішки, які стоять поруч. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

77. На початку гри є k груп предметів. Два гравці по черзі розбивають кожну групу, що містить більше ніж один предмет, на дві менші групи. Переможцем вважається той, хто виконає останнє розбиття.

78. Два гравці по черзі виймають зі скриньки предмети, кількість яких не перевищує половини наявних у скриньці. Програє той, хто візьме останній предмет.

79. Є дві купи предметів. Два гравці по черзі забирають одну купу, а іншу ділять на дві частини (обидві дії виконує той самий гравець). Переможцем вважається той, хто останнім ходом залишить дві купки по одному предмету.

80. Є n шашок, розташованих у ряд, $n<15$. Два гравці ходять по черзі. Першим ходом перевертається будь-яка шашка, а кожним наступним — будь-які одна або дві сусідні ще неперевернуті шашки. Переможцем вважається той, хто примусить суперника зробити останній хід.

81. Гра «Фан-тан» (нім). На початку гри є k груп предметів. Два гравці по черзі забирають з будь-якої групи довільну додатну кількість предметів (можливо, й всі предмети групи). Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

---

* Клод Гаспар Баше де Мезірака (1581–1638) — французький математик, поет і перекладач.

82. Нім Фібоначчі. Два гравці по черзі виймають зі скриньки предмети. Першим ходом можна взяти довільну додатну кількість, але не всі предмети. Починаючи з другого ходу, кожен гравець бере довільну кількість предметів у межах від 1 до подвоєної кількості предметів, взятих попереднім ходом. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

83. Нім-ізоморфна гра. Прямокутна таблиця має розміри $n \times m$ клітин. На початку гри в кожному рядку таблиці розташовано по одній шашці. Два гравці по черзі рухають будь-яку шашку на довільну додатну кількість клітин праворуч без виходу за межі таблиці. Переможцем вважається той, хто робить останній хід.

84. Нім-ізоморфна гра. На m-клітинній таблиці розташовано n різнокольорових шашок. Два гравці по черзі рухають довільну шашку на довільну додатну кількість клітин праворуч без виходу за межі таблиці. Переможцем вважається той, хто робить останній хід.

85. Нім-ізоморфна гра. Дано певне натуральне число n. Два гравці по черзі замінюють це число на його частку від ділення на степінь простого числа за умови, що остача дорівнює 0. Переможцем вважається той, хто робить останній хід.

86. Нім-ізоморфна гра Норткотта. Поле для гри — прямокутна таблиця розміром $n \times m$ клітин. На початку гри кожна клітина першого і останнього стовпчиків містять відповідно по одній білій чи чорній шашці. Два гравці по черзі пересувають будь-яку шашку свого кольору на будь-яку додатну кількість клітин, не виходячи за межі відповідного рядка і не перестрибуючи через шашку суперника. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

87. Гра Дьюдені*. Два гравці по черзі називають натуральні числа в межах від 1 до m включно, причому кожне назване число відмінне від попереднього. Визначається сума S усіх названих чисел. Переможцем визначається той, хто отримає рівність $S = p$ або примусить суперника отримати нерівність $S > p$.

88. Гра Болтянського**. Два гравці по черзі називають натуральні числа в межах від a до b включно (a, b — дані натуральні числа). Визначається добуток усіх названих чисел. Переможцем вважається той, хто перший отримає добуток, більший за дане натуральне число c.

---

* Генрі Ернест Дьюдені (1857–1930) — англійський математик, автор багатьох головоломок.

** Володимир Григорович Болтянський (1925) — російський математик.

89. Гра дат. Перший гравець називає будь-яку дату січня. Далі гравці по черзі збільшують або порядковий номер місяця в році, або номер дня у місяці. Переможцем вважається той, хто перший отримає дату 31 грудня.

90. Давньокитайська гра «Цзяньшицзи» (вибирання каменів). На початку гри є дві групи предметів. Два гравці по черзі забирають предмети з цих груп: або лише з однієї групи довільну кількість (можна всі предмети, але не менше ніж один), або з обох груп однакову додатну кількість. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

91. Гра «Одинокий король». На початку гри шаховий король стоїть на полі шахівниці a1 (нижній лівий кут). Два гравці по черзі рухають короля на одне поле праворуч, вгору або по діагоналі праворуч і вгору одночасно. Переможцем вважається той, хто перший пересуне короля на поле h8 (правий верхній кут).

92. Гра «Перемагає парність». На початку гри є група предметів, що містить їх непарну кількість $n=2k+1$. Два гравці по черзі забирають з цієї групи предмети — від 1 до p включно, накопичуючи їх у себе. Переможцем вважається той, хто наприкінці гри матиме парну кількість предметів.

93. На початку гри на полі 5 розташовано білу шашку, а на полі 15 — чорну (*рис. 1*). Два гравці по черзі пересувають шашки: перший — лише білу (він починає гру), другий — лише чорну на сусіднє поле вздовж лінії. Перший гравець виграє тоді, коли не більше ніж за 6 ходів поставить білу шашку на чорну. Інакше перемагає другий гравець, який ходить чорною шашкою.

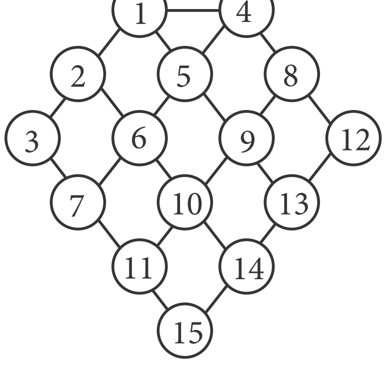

Рис. 1

94. Гра «Тригекс». Поле для гри містить 9 кругів з центрами на 9 прямих (*рис. 2*). Два гравці по черзі ставлять на круги по одній фішці свого кольору (білого або чорного). Переможцем вважається той, хто перший займе три круги на одній із проведених прямих.

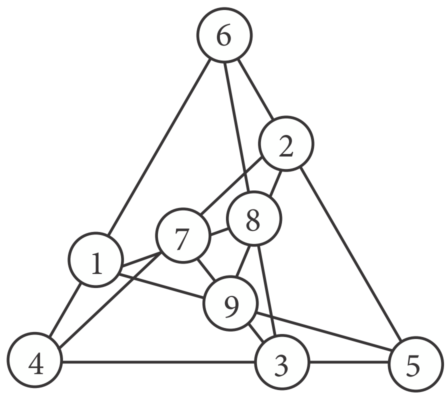

Рис. 2

95. Гра Піта Хейна «Такс-тікс». Квадратну дошку розділено на однакові клітини квадратної форми. На початку гри кожна клітина містить по одній шашці. Грають двоє, ходять по черзі. За один хід забирається довільна кількість шашок з будь-якого вертикального стовпчика або горизонтального рядка. Брати шашки дозволяється лише підряд, не перескакуючи через порожні клітини. Переможцем вважається той, хто бере останню шашку.

96. Гра Піта Хейна «Гекс». Робмовидну дошку розбито на правильні шестикутники (*рис. 3*). Дві протилежні сторони ромба називають чорними, дві інші — білими. Два гравці по черзі виставляють на вільні шестикутники по одній фішці: один гравець — білі, інший — чорні фішки. Переможцем вважається той, хто перший побудує ланцюг зі «своїх» фішок між «своїми» сторонами.

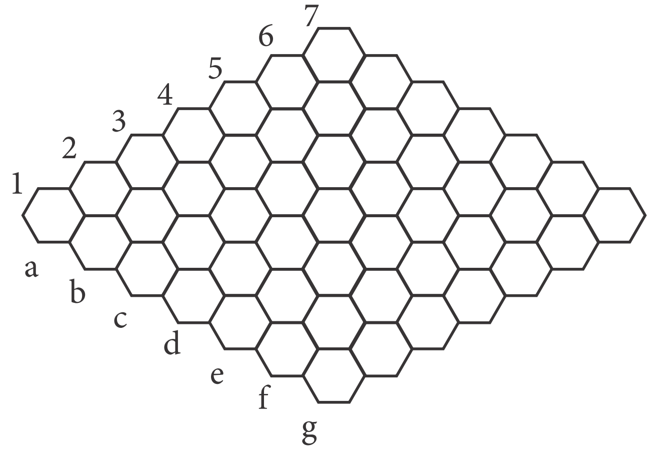

Рис. 3

97. Гра Ґранді*. На початку гри є одна група предметів. Два гравці по черзі розбивають одну з наявних груп на дві нерівні частини. Гра триває доти, доки всі групи не міститимуть 1–2 предмети. Переможцем вважається той, хто виконає останнє розбиття.

98. Гра «Двоколірні шашки». Ігрове поле — прямокутна дошка розміром $n \times m$ квадратних клітин. На початку гри на кожній клітині встановлено по одній двоколірній шашці (одна сторона біла, інша — чорна) довільним чином. Два гравці сидять з одного боку дошки і по черзі перевертають шашки у довільному прямокутному блоці клітин, правий нижній кут якого містить шашку з чорним верхом. Переможцем вважається той, хто отримає розташування всіх шашок білою стороною догори.

99. Гра Джона Конуея і Майкла Стюарта Патерсона «Розсада». На аркуші паперу позначено n точок («ямок для розсади»). Два гравці по черзі проводять лінії, що починаються в одній з точок («розсада пускає росток»). Ці лінії або сполучають дві різні позначені точки, або описують петлю й повертаються в початкову позначену точку. Кожна така лінія не має точок самоперетину, не перетинає інші проведені лінії та не проходить через позначену точку, що не є її початком або кінцем. При цьому з кожної точки має виходити не більше ніж 3 лінії. Після проведення лінії гравець ставить на ній нову точку. Переможцем вважається той, хто проведе останню лінію.

100. Гра «L». Ігрове поле — квадратна дошка, поділена на 16 квадратних клітин. Два гравці мають по одній L-подібній фігурі різного (білого або чорного) кольору, що займає 4 квадрати, і дві спільні фішки. Початкову позицію гри подано на *рис. 4*. Виконати хід — означає обов'язково змінити розташування своєї фігури, не покриваючи клітини поля, зайняті фігурою суперника або фішками, за необхідності перевертаючи фігуру. Після цього можна, але не обов'язково, перемістити одну фішку на вільну клітину. Гравці ходять по черзі. Гру починають білі. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід.

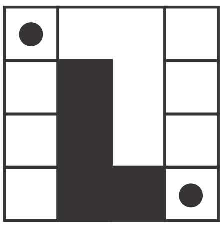

Рис. 4

* Ґвідо Ґранді (1671–1742) — італійський математик.

101. На площині дано n точок. Два гравці по черзі сполучають їх відрізками прямих таким чином, щоб внутрішні точки одного відрізка не належали іншому. Переможцем вважається той, хто проводить останній відрізок.

102. На площині дано вершини правильного шестикутника. Два гравці по черзі зафарбовують сторони і діагоналі шестикутника синім і червоним кольором. Переможцем вважається той, хто примусить суперника побудувати трикутник з відрізків свого кольору.

103. Головоломка «Ханойські башти». На одному стрижні A нанизано диски таким чином, що діаметри основ дисків зменшуються знизу догори. Потрібно перекласти ці диски на інший стрижень B, використовуючи допоміжний стрижень C. При цьому заборонено розташовувати диск більшого діаметра над диском меншого діаметра.

104. На прямій рухаються точки A і B з максимальними швидкостями v_A і v_B відповідно, $v_A > v_B$. Указати одну з можливих стратегій (поведінок) точки A, за яких точка A зіткнеться з точкою B незалежно від того, в якому боці і на якій відстані точка B буде розташована відносно точки A в початковий момент, якщо відомо: а) v_A і v_B; б) v_A. Обчислити час до зіткнення для обраної стратегії за певних значень v_A і v_B та початкового розташування точок A і B. Яка найслабкіша умова існування такої стратегії для несталих максимальних швидкостей?

ЛІТЕРАТУРА

1. Арсак Ж. Программирование игр и головоломок.— М.: Наука, 1990.— 223 с.
2. Бардадим В. О. Сьома міжнародна олімпіада з інформатики // У світі математики.— 1995.— Т. 1, № 2.— С. 57–65.
3. IX Всеукраїнська олімпіада з інформатики / В. О. Бардадим, В. В. Бондаренко, С. В. Данильченко, І. І. Рубан // У світі математики.— 1996.— Т. 2, № 3.— С. 90–94.
4. Бардадим В. О., Гуржій А. М. Задачі IX Міжнародної олімпіади з інформатики // Комп'ютер у школі та сім'ї.— 1998.— Т. 2.— С. 46–50.
5. Бондаренко В. В., Грушецький О. М. X Міжнародна олімпіада з інформатики // Комп'ютер у школі та сім'ї.— 1999.— № 1.— С. 46–52.
6. Бондаренко В. В., Жук С. О. Задачі XII Всеукраїнської олімпіади з інформатики та обчислювальної техніки // Комп'ютер у школі та сім'ї.— 1999.— № 3.— С. 41–45.
7. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы.— М.: Мир, 1985.— 406 с.

8. Вибрані питання елементарної математики / В. А. Вишенський, А. Я. Дороговцев, І. І. Єжов та ін.— К.: Вища школа, 1982.— 455 с.
9. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики.— К.: Либідь, 1993.— 344 с.
10. Вишенський В. А. Гра фан-тан // У світі математики.— 1995.— Т. 1, № 2.— С. 69–74.
11. Вишенський В. А. Гра цзяньшицзи // У світі математики.— 1996.— Т. 2, № 1.— С. 75–81.
12. Епанешников А. М., Епанешников В. А. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0.— М.: Диалог-МИФИ, 1995.— 282 с.
13. Касаткин В. В., Владыкина Л. И. Алгоритмы и игры.— К.: Радянська школа, 1984.— 95 с.
14. Касаткін В. М. Кунст-камера алгоритмів // Комп'ютер у школі та сім'ї.— 1998.— № 2.— С. 44–45.
15. Ліо Кі (Левко Ковалів). Ломиголовки (ігри без партнера).— К.: ТВіМС, 1996.— 150 с.
16. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру.— К.: Радянська школа, 1972.— 151 с.
17. Раков С. А., Білоусова Л. І. VIII Всеукраїнська олімпіада студентів з інформатики // Комп'ютер у школі та сім'ї.— 1999.— № 4.— С. 47–50.
18. Рудик О. Б. Побудова інформаційної моделі многогранника // Математика в школі.— 1999.— № 2.— С. 8–11.
19. Рудик О. Б. Олімпіада з основ інформатики та обчислювальної техніки 1998–1999 навчального року в Київській області.— Київ: КМІУВ ім. Б. Грінченка, 1999.— 112 с.
20. Рудик О. Б. Демонстраційне розв'язання узагальнення задачі про сніжинку // Інформатика.— 1999.— № 35.— С. 3.
21. Рудик О. Б. Опорний конспект: структури мов програмування Basic і Pascal // Інформатика.— 1999.— № 38.— С. 2–4.
22. Рудик О. Програмування пошуку виграшної стратегії, логічних умовиводів і розрахунків з багатоцифровими числами.— К.: КМІУВ ім. Б. Д. Грінченка, 2001.— 38 с.
23. Рудик О. Примітивна графіка, алгебра многочленів над полем раціональних чисел, розв'язування систем лінійних рівнянь на олімпіадах з інформатики.— К.: КМІУВ ім. Б. Д. Грінченка, 2002.— 44 с.
24. Рудик О. Олімпіада з інформатики 2002–2003 навчального року в місті Києві.— К.: КМПУ ім. Б. Д. Грінченка, 2003.— 24 с.
25. Рудик О. Олімпіада з інформатики 2003–2004 навчального року в місті Києві.— К.: КМПУ ім. Б. Д. Грінченка, 2004.— 20 с.
26. Рудик О. Спеціальний курс «Прикладна математика» й олімпіада з інформатики у місті Києві у 2004–2005 навчальному році.— К.: КУ ім. Б. Д. Грінченка, 2009.— 262 с.

27. III (міський) етап олімпіади з інформатики 2006 року у місті Києві (завдання, коментарі, авторські розв'язання) / А. А. Гриненко, Ю. В. Знов'як, Д. О. Кордубан та ін. // Інформатика та інформаційні технології у навчальних закладах.— 2006.— № 4–5.— С. 158–174.
28. Олімпіада з інформатики у Києві у 2006–2007 навчальному році / Ю. В. Знов'як, Д. О. Кордубан, Д. П. Мисак та ін. // Інформатика та інформаційні технології у навчальних закладах.— 2007.— № 2 (8).— С. 109–127.
29. Київська олімпіада з інформатики у 2007–2008 навчальному році / А. А. Гриненко, Ю. В. Знов'як, Д. О. Кордубан та ін. // Інформатика та інформаційні технології у навчальних закладах.— 2009.— № 3.— С. 105–120.
30. Хижа О. Л. Розв'язування задач підвищеної складності з інформатики // Інформатика.— 1999.— № 37, 38, 42.

РЕСУРСИ ГЛОБАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ

1. Міжнародні олімпіади з інформатики (англійською мовою). URL: http://olympiads.win.tue.nl/ioi/index-cave.html.
2. Українські учнівські олімпіади з інформатики. URL: http://uoi.in.ua.
3. IV етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з інформатики, Київ, 2010 рік / Упоряд. О. Б. Рудик. URL: http://uoi2010.kmpu.edu.ua.
4. Всеукраїнські учнівські олімпіади / А. М. Гуржій, В. В. Бондаренко, О. В. Співаковський, Ш. І. Ягіяєв.— Херсон: Айлант, 2005.— 233 с. URL: http://dls.ksu.kherson.ua/dls/GetFile.aspx?m=2&d=425;olimp.pdf.
5. Вінницький центр проведення учнівських олімпіад «Олімп» (англійською, російською та українською мовами). URL: http://www.olymp.vinnica.ua.
6. Київські учнівські олімпіади з інформатики (упоряд. О. Б. Рудик). Демонстраційні розв'язання логічних задач і базових задач на рівні загальноосвітньої школи, подані презентаціями, умови й тести олімпіадних задач підвищеної складності та рекомендації щодо їхнього розв'язання, лекції з вибраних питань дискретної математики прикладами програм з динамічними структурами даних. URL: http://kievoi.narod.ru.