

НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

Програма курсу за вибором для учнів 8 або 9 класів

Автор: *Єргіна Оксана Володимирівна, старший викладач кафедри методики природничо-математичної освіти і технологій ІППО КУ імені Бориса Грінченка*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

У допрофільній підготовці учнів 8–9 класів особливого значення набувають курси за вибором, оскільки саме у цей освітній період учні повинні визначитися з профілем навчання у старшій школі. На курси за вибором покладаються два найважливіші завдання: допомогти учням реально оцінити свої можливості і зорієнтувати їх на подальший вибір профілю навчання. Зміст курсу має сприяти формуванню позитивної мотивації до опанування нових аспектів змісту та способів діяльності, стійкого інтересу до предмета, який буде профільним у майбутньому, розвивати здатність логічно мислити, аналізувати, порівнювати, зіставляти, систематизувати, узагальнювати, обґрунтовувати, шукати раціональні і нестандартні шляхи вирішення

проблеми. Крім того, зміст курсу за вибором повинен не дублювати зміст підручника, а доповнювати його. Цим вимогам відповідає курс «Нестандартні методи розв'язування деяких видів рівнянь вищих степенів» для допрофільної підготовки учнів, присвячений розв'язуванню окремих видів рівнянь, що зводяться до квадратних, які майже не представлені в підручниках з алгебри для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів, проте вивчаються у класах з поглибленим вивченням математики.

Мета курсу:

- розширити і систематизувати знання учнів про види рівнянь та методи їх розв'язування;
- сформувати навички усного знаходження коренів квадратного рівняння за оберненою теоремою Вієта;
- створити міцне підґрунтя для подальшого навчання у тих профілях старшої школи, де математика вивчатиметься на академічному або профільному рівнях.

Курс призначений для учнів 8–9 класів тих профілів навчання, де математика не вивчається поглиблено, та класів універсального профілю і розрахований на 16 академічних годин. Його можна вивчати протягом IV чверті 8 класу паралельно з вивченням теми «Квадратні рівняння» або протягом I (II) чверті 9 класу за умови, що у навчальному плані загальноосвітнього навчального закладу на курси за вибором виділено не менше ніж 2 години на тиждень. В інших випадках курс доцільно опрацювати у 9 класі протягом одного семестру (1 година на тиждень). Розподіл годин між темами курсу може змінюватися залежно від рівня підготовки учнів, їхніх потреб і можливостей.

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

(2 год на тиждень протягом IV чверті у 8 класі

або 1 год на тиждень протягом одного семестру у 9 класі, всього 16 год)

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
1	Вступ. Деякі відомості з історії розвитку теорії рівнянь. Розв'язування рівнянь вищих степенів способом розкладання на множники	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • володіє поняттями «корінь рівняння», «розв'язати рівняння», «рівносильні рівняння», «ступінь рівняння»; • знає формули скороченого множення та способи розкладання на множники; • уміє застосовувати ці способи для розкладання многочленів на множники при розв'язуванні рівнянь.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
1	Тема 1. Розв'язування квадратного рівняння за допомогою формули та усно за теоремою, оберненою до теореми Вієта	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> знає теорему Вієта (пряму і обернену), умову існування коренів квадратного рівняння; уміє усно розв'язувати зведене квадратне рівняння, що має цілі корені, та незведене квадратне рівняння, що має раціональні корені.
1	Тема 2. Застосування методу введення нової змінної для розв'язування біквадратних рівнянь та рівнянь, для яких заміна є очевидною (повторення за 8 клас)	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> знає метод введення нової змінної; розпізнає біквадратне рівняння; уміє вводити заміну для розв'язування біквадратних рівнянь; розпізнає рівняння, для яких заміна змінної є очевидною, і розв'язує їх.
1	Тема 3. Розв'язування рівнянь вигляду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$, де $a+b=c+d$	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> розпізнає рівняння такого вигляду серед інших рівнянь; знає спосіб підготовки рівняння до заміни, застосовує його та розв'язує рівняння.
1	Тема 4. Розв'язування симетричних рівнянь 3-го та 4-го степенів	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> знає, що таке симетричне рівняння 3-го та 4-го степенів, розпізнає його серед інших рівнянь; уміє зводити симетричне рівняння 4-го степеня до вигляду $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$, вводити нову змінну і правильно виконувати необхідні перетворення, щоб звести рівняння до квадратного, розв'язувати його та повертатися до вихідної змінної; знає, що коренем симетричного рівняння 3-го степеня є число (-1); уміє розв'язувати симетричне рівняння 3-го степеня шляхом розкладання його лівої частини на множники.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
1	Тема 5. Розв'язування зворотних рівнянь (вигляду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, де $\frac{e}{a} = \frac{d^2}{b^2}$)	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> зворотне рівняння серед інших рівнянь за властивістю його коефіцієнтів; • <i>уміє</i> зводити рівняння до вигляду $a\left(x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$, розв'язувати його та повернутися до вихідної змінної; • <i>знає</i>, що коренем зворотного рівняння непарного степеня є число (-1); • <i>уміє</i> розв'язувати зворотне рівняння 3-го степеня шляхом розкладання на множники.
1	Тема 6. Розв'язування рівнянь вигляду $\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{rx^2 + tx + q} = c$ та $\frac{px^2 + ax + q}{px^2 + nx + q} + \frac{rx^2 + bx + q}{rx^2 + tx + q} = c$	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i> метод підготовки рівняння до введення нової змінної та розв'язування одержаного після заміни змінної рівняння; • <i>знає</i>, як повернутися до вихідної змінної та одержати корені вихідного рівняння.
1	Тема 7. Розв'язування рівнянь вигляду $(px^2 + nx + q) \times (rx^2 + tx + q) = ax^2$	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дане рівняння серед інших; • <i>знає</i> метод підготовки рівняння до заміни та застосовує його для розв'язування; • <i>обґрунтовує</i>, чому можна ділити обидві частини рівняння на x^2.
1	Тема 8. Розв'язування рівнянь вигляду $x^2 + \frac{a^2x^2}{(x+a)^2} = b$ та інших, що розв'язуються виділенням квадрата двочлена	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i>, як доповнити ліву частину рівняння до квадрата суми або різниці залежно від знака коефіцієнта a;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
		<ul style="list-style-type: none"> • <i>уміє</i> виконувати перетворення, що зводять рівняння до квадратного, розв'язувати одержане рівняння і повернутися до вихідної змінної.
1	Тема 9. Розв'язування рівнянь вигляду $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, $(x+a)^5 - (x+b)^5 = c$	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i>, як ввести нову змінну; • <i>уміє</i> виконувати перетворення, що зводять рівняння до бікватратного, розв'язувати одержане бікватратне рівняння і повертатися до вихідної змінної.
1	Тема 10. Розв'язування однорідних рівнянь вигляду $af^2(x) + bf(x)g(x) + cg^2(x) = 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени степенів m і n відповідно, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> однорідні рівняння й такі, що до них зводяться, серед інших; • <i>знає</i> спосіб підготовки рівняння до введення нової змінної; <i>вміє</i> його застосовувати; <i>знає</i> про можливість втрати коренів при застосуванні цього способу і <i>перевіряє</i> ті значення, які можуть бути втрачені, на належність до множини розв'язків рівняння; • <i>уміє</i> повертатися до вихідної змінної.
3	Тема 12. Розв'язування різних видів рівнянь та рівнянь підвищеної складності	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>класифікує</i> рівняння із запропонованого переліку залежно від їх виду та методу розв'язування; • <i>розв'язує</i> різні види рівнянь методом заміни змінної, в тому числі рівняння підвищеної складності.
2	Резервний час	

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.— К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008.— 312 с.
2. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Збірник задач з математики з прикладами розв'язань. 7–11 клас.— Кам'янець-Подільський: Абетка, 2002.— 704 с.

3. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов. Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики.— 3-е изд.— М., 1996.
4. Задачи по математике. Алгебра. Учеб. пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко.— М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики.— Х.: Гімназія, 2008.— 368 с.
6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання з алгебри для 8 класу.— Харків: Гімназія, 2008.
7. Єргіна О., Єргін А. Розв'язування деяких рівнянь вищих степенів // Математика.— 2006.— № 14.
8. Роганін О. М., Каплун О. І. Математика: Практичний довідник.— Харків: ФОП Співак Т. К., 2009.— 416 с.
9. Саушкін О. Ф. Рівняння вищих степенів. Навч. посібник.— К.: КНЕУ, 1999.
10. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів серед. закладів освіти / За ред. М. Й. Ядренка.— 2-ге вид., випр. і доп.— К.: Техніка, 2003.— 591 с.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКЛАДАННЯ КУРСУ

Цей курс можна викладати у 8 класі, коли вивчається тема «Квадратні рівняння» або у 9 класі.

При розв'язуванні рівнянь вищих степенів, що розглядаються у даному курсі, використовується метод введення нової (допоміжної) змінної або, іншими словами, заміна змінної. «Нестандартність» полягає не в самому методі, а в тому, що нестандартною є підготовка рівняння до використання цього методу. Тому процес підготовки рівняння до введення нової змінної доцільно називати нестандартним (або штучним) методом розв'язування рівняння. Загальний вигляд рівнянь подається за умови, що коефіцієнти рівнянь $a, b, c, d, e, f, k, m, n, p, q$ — деякі дійсні числа, відмінні від нуля.

Вступ — це своєрідний урок актуалізації знань, де рекомендується повторити означення таких понять, як «корінь рівняння», «рівносильні рівняння», «розв'язати рівняння», згадати всі вивчені у 7 класі способи розкладання многочленів на множники, формули скороченого множення та розв'язати декілька рівнянь вигляду $f(x) = 0$, ліва частина яких є многочленом з однією змінною, що розкладається на множники. Також можна повторити і спосіб розв'язування квадратного рівняння виділенням квадрата двочлена. Учні мають ознайомитися з розвитком теорії рівнянь на різних етапах розвитку математики. Такий огляд можуть підготувати і самі учні (реферат, мультимедійна презентація).

Тема 1. На цьому етапі доцільно повторити теорему Вієта (пряму і обернену), з її допомогою усно розв'язати декілька зведених квадратних рівнянь, повторити формулу коренів квадратного рівняння, а також сформулювати вміння учнів застосовувати обернену теорему Вієта до розв'язування незведеного квадратного рівняння ([2], [5]).

Тема 2. Бажано повторити, що таке дробове раціональне рівняння і поняття ОДЗ.

Серед рівнянь, для яких заміна змінної є очевидною, обов'язково розглянути і такі, що є дробовими раціональними. Наприклад:
 $(2x-1)^4 + (2x-1)^2 - 2 = 0; \frac{x-3}{x+4} - \frac{x+4}{x-3} = \frac{1}{2}.$

Тема 3. Викладання цієї теми доцільно розпочати з розгляду рівняння типу $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 15) = 100$ як пропедевтичного кроку до пошуку методу розв'язування рівнянь теми 3. Особливу увагу звернути на те, чому ділення обох частин рівняння на x^2 ($x \neq 0$) не призводить до втрати коренів. Наголосити на обов'язковості перевірки такого значення змінної на належність до множини розв'язків рівняння при використанні ділення обох частин на вираз зі змінною, якщо такі значення входять до ОДЗ цих рівнянь. Це стосуватиметься і рівнянь тем 4–7, 10.

Тема 4. При вивченні цієї теми слід розглянути як рівняння 3-го, так і 4-го степенів, щоб учні зрозуміли принципову різницю між підходами до розв'язування кожного з розглядуваних рівнянь. Це стосується і рівнянь теми 5.

Тема 5. Необхідно акцентувати увагу учнів на залежності між коефіцієнтами рівняння, що дає змогу називати його зворотним. Якщо рівень математичної підготовки учнів, що вивчають даний курс, є високим, то можна розглянути і зворотне рівняння 6-го степеня $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + k = 0$, для розв'язування якого обидві частини рівняння потрібно буде ділити вже на x^3 , а залежність між його коефіцієнтами буде такою: $\left(\frac{a}{k}\right)^2 = \left(\frac{b}{f}\right)^3 = \left(\frac{c}{e}\right)^6$ ([5]).

Тема 7. Під час розгляду рівнянь теми 7 слід звернути особливу увагу на те, що праву частину ділимо на x^2 , при цьому кожний множник у лівій частині ділимо на x , що й означатиме, що ліва частина також поділена на x^2 . Зазвичай саме цей момент найважче сприймається учнями.

Тема 8. При розв'язуванні рівнянь цієї теми потрібно наголосити на залежності вибору виділення квадрата суми або різниці від знака коефіцієнта a , прийшовши до цього практичним шляхом під час розв'язування

такого рівняння вперше. Це дасть змогу учням самим встановити, що при від'ємному a у лівій частині виділяємо квадрат суми, а при додатному a — квадрат різниці. Таким самим способом можна запропонувати розв'язати і рівняння вигляду $\frac{x^4}{(x^2 - 2)^2} + \frac{x^4}{(x^2 + 2)^2} = \frac{40}{9}$.

Тема 9. При розв'язуванні рівнянь теми 9 доцільно звернути особливу увагу на спосіб введення нової змінної, розглянути як рівняння 4-го, так і 5-го степенів.

Тема 10. Перед розглядом рівнянь теми 10 слід пояснити, що таке однорідний многочлен, степінь однорідності і, відповідно, що таке однорідне рівняння.

Години, що виділені наприкінці програми на розв'язування рівнянь, рекомендуємо використати для розв'язування рівнянь підвищеної складності, наприклад таких, що розв'язуються методом введення параметра, тощо.

Години резервного часу можна використати у тих темах, де, можливо, виділено замало часу на їх опрацювання, на питання історії розвитку теорії рівнянь або для групової роботи учнів, наприклад у вигляді командних змагань. Правила змагань можуть бути такими: кожна команда готує для супротивників по однаковій кількості рівнянь, подібних до вивчених, і записує кожне на окрему картку. Представники команд витягують картки, викладені зворотними сторонами на полі суперника, і розв'язують рівняння, зазначені на картках. Виграє команда, яка отримує найбільшу кількість балів. Бали нараховуються відповідно до кількості правильно розв'язаних членами команд рівнянь, кількості правильно знайдених способів розв'язування, а також до кількості штрафних балів, що залежать від того, скільки разів представники команд вимушені будуть звернутися за підказкою до членів своєї команди. За необхідності результати такого змагання можуть бути зараховані як результат навчальних досягнень з даного курсу.

При вивченні нестандартних методів розв'язування рівнянь доцільно починаючи з теми 3 дати учням можливість піти стандартним шляхом (розкрити дужки або звести дроби до спільного знаменника, якщо рівняння дробове). Труднощі, з якими стикнуться учні, сприятимуть мотивації пошуку інших, штучних, методів розв'язування таких видів рівнянь. Також слід врахувати, що при використанні методу заміни змінної, навіть серед тих учнів, які добре засвоюють пропонований матеріал, часто трапляються випадки, коли після розв'язування допоміжного рівняння з новою змінною у відповідь записуються розв'язки саме допоміжного рівняння, тобто до вихідної змінної учні не повертаються. Тому потрібно давати можливість учневі самому знайти цю помилку шляхом здійснення перевірки хоча б одного з коренів. Це допоможе учням уникати таких помилок у майбутньому.